Mathematisches Institut
Thomas Markwig

Sommersemester 2009, Blatt 2
Arne Buchholz

Moderne Geometrie

Abgabetermin: Montag, 27/04/2009, 12:00 Uhr

Aufgabe 4: Es sei R ein Ring. Die Abbildung $R \hookrightarrow R[x_1, \ldots, x_n] : a \mapsto a$ ist offenbar ein Ringhomomorphismus, der $R[x_1, \ldots, x_n]$ zu einer R-Algebra macht.

a. Zeige, daß $R[x_1, \ldots, x_n]$ der folgenden universellen Eigenschaft genügt: wenn (R', φ) irgendeine R-Algebra ist und $a_1, \ldots, a_n \in R'$ gegeben sind, dann gibt es genau einen R-Algebrenhomomorphismus $\alpha : R[x_1, \ldots, x_n] \to R'$, so daß $\alpha(x_i) = a_i$ für alle $i = 1, \ldots, n$.

b. Es seien $I \trianglelefteq R[x_1, \ldots, x_n]$ und $J \trianglelefteq R[y_1, \ldots, y_m]$ zwei Ideal. Zeige, daß die folgenden Aussagen äquivalent sind:

   (a) $\varphi : R[x_1, \ldots, x_n]/I \to R[y_1, \ldots, y_m]/J$ ist ein R-Algebrenhomomorphismus.

   (b) Es gibt $f_1, \ldots, f_n \in R[y_1, \ldots, y_m]$, so daß $g(f_1, \ldots, f_n) \in J$ für alle $g \in I$ und $\varphi(\overline{g}) = \overline{g(f_1, \ldots, f_n)}$ für alle $\overline{g} \in R[x_1, \ldots, x_n]/I$.

   (c) Es gibt einen R-Algebrenhomomorphismus $\psi : R[x_1, \ldots, x_n] \to R[y_1, \ldots, y_m]$, so daß $\psi(I) \subseteq J$ und $\varphi(\overline{g}) = \overline{\psi(g)}$.

Beachte, a. bedeutet: wir können eine R-Algebrenhomomorphismus auf $R[x_1, \ldots, x_n]$ dadurch eindeutig definieren, daß wir Bilder für die x_i festlegen!

Aufgabe 5: Es sei R ein Ring und $I, J_1, \ldots, J_n \trianglelefteq R$ Ideale in R. Zeige:

a. $I : \left(\sum_{i=1}^n J_i\right) = \bigcap_{i=1}^n (I : J_i)$.

b. $\left(\bigcap_{i=1}^n J_i\right) : I = \bigcap_{i=1}^n (J_i : I)$.

c. $\sqrt{J_1 \cap \ldots \cap J_n} = \sqrt{J_1} \cap \ldots \cap \sqrt{J_n}$.

d. $\sqrt{J_1 + \ldots + J_n} \supseteq \sqrt{J_1} + \ldots + \sqrt{J_n}$.

Aufgabe 6: Es sei R ein Ring und $f = \sum_{n=0}^\infty a_n x^n \in R[[x]]$ sei eine formale Potenzreihe über R. Zeige:

a. f ist genau dann eine *Einheit* wenn a_0 eine Einheit in R ist.

b. Gib alle Einheiten in $K[[x]]$ an, wenn K ein Körper ist.

c. x ist kein Nullteiler in $R[[x]]$.

d. Wenn f nilpotent ist, dann ist auch a_n nilpotent für alle n. Gilt die Umkehrung auch?

Hinweis für a., betrachte zunächst den fall $a_0 = 1$ und beachte dann, daß $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^\infty x^n$.