Mathematisches Institut
Thomas Markwig

Sommersemester 2009, Blatt 3
Arne Buchholz

Moderne Geometrie

Abgabetermin: Montag, 04/05/2009, 12:00 Uhr

Aufgabe 8: Es sei R ein Ring, in dem für jedes $r \in R$ eine natürliche Zahl $n = n(r) > 1$ existiert, so daß $r^n = r$.

a. Zeige, $\mathrm{Spec}(R) = \mathfrak{m}\!-\mathrm{Spec}(R)$.

b. Gib ein Beispiel für einen solchen Ring R an, der kein Körper ist.

Aufgabe 9: Es sei $R \neq 0$ ein Ring. Zeige, daß $\mathrm{Spec}(R)$ ein minimales Element bezüglich der Inklusion besitzt, d.h. $\exists\ P_0 \in \mathrm{Spec}(R)\ :\ \forall\ P \in \mathrm{Spec}(R)$ mit $P \subseteq P_0$ schon $P = P_0$ gilt.

Hinweis, man verwende das Zornsche Lemma mit einer geeigneten Teilordnung auf der Menge aller Primideale.

Aufgabe 10: Es sei R ein Ring und $\mathfrak{N}(R)$ das Nilradikal von R. Zeige, daß die folgenden Aussagen äquivalent sind:

a. $R/\mathfrak{N}(R)$ ist ein Körper

b. $|\mathrm{Spec}(R)| = 1$.

c. Jedes Element von R ist entweder eine Einheit oder nilpotent.

Gib ein Beispiel für einen solchen Ring an, der kein Körper ist.

Aufgabe 11: [Zariski Topologie]

Es sei R ein Ring. Für eine Teilmenge $A \subset R$ definieren wir die *Verschwindungsmenge* von A als

$$V(A) := \{P \in \mathrm{Spec}(R) \mid A \subseteq P\} \subseteq \mathrm{Spec}(R).$$

Zeige, daß die Menge $\mathcal{T} := \{V(A) \mid A \subseteq R\}$ eine Topologie auf $\mathrm{Spec}(R)$ in dem Sinne definiert, daß $\mathcal{T}$ die Menge der abgeschlossenen Mengen von $\mathrm{Spec}(R)$ ist.
Um dies zu zeigen, sollten folgende Aussagen gezeigt werden:

a. $V(A) = V(\langle A\rangle) = V\big(\sqrt{\langle A\rangle}\big)$ für jedes $A \subseteq R$.
Insbesondere gilt, $\mathcal{T} = \{V(I) \mid I \trianglelefteq R\}$.

b. $V(0) = \mathrm{Spec}(R)$.

c. $V(R) = \emptyset$.

d. $V(I) \cup V(J) = V(I \cap J) = V(I \cdot J)$ für $I, J \trianglelefteq R$.

e. $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} V(I_\lambda) = V\big(\sum_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda\big)$ für $I_\lambda \trianglelefteq R$.

Bestimme $V(\langle\overline{x}\rangle)$ und $V\big(\langle\overline{x^2-1}\rangle\big)$ für den Ring $R = \mathbb{C}[x,y]/\langle xy\rangle$.