Mathematisches Institut　　Sommersemester 2009, Blatt 4
Thomas Markwig　　Arne Buchholz

Moderne Geometrie

Abgabetermin: Montag, 11/05/2009, 12:00 Uhr

Aufgabe 12: Es sei $\varphi : R \longrightarrow S$ ein Ringhomomorphismus und $Q \in \mathrm{Spec}(S)$. Zeige, dann ist $Q^c = \varphi^{-1}(Q)$ ein Primideal in R. Ist das Urbild eines maximalen Ideals wieder ein maximales Ideal?

Aufgabe 13: Es sei $d \in \mathbb{Z}$ eine quadratfreie negative ganze Zahl. Zeige, $\mathbb{Z}\left[\sqrt{d}\right]$ ist genau dann faktoriell, wenn $d \in \{-1, -2\}$.

Hinweis, zeige 2 ist nicht prim, aber für $d < -2$ ist 2 irreduzibel. Für "nicht prim" beachte man, daß entweder $2 \mid d$ oder $2 \mid d - 1$ gilt, und man beachte, daß in $\mathbb{Z}\left[\sqrt{d}\right]$ jedes Element *eindeutig* als $a + b \cdot \sqrt{d}$ geschrieben werden kann.

Aufgabe 14: Zeige, daß die folgenden beiden Aussagen gleichwertig sind:

a. R ist ein HIR.

b. R ist faktoriell und für $a, b \in R$ mit $1 \in \mathrm{ggT}(a, b)$ gilt $1 \in \langle a, b \rangle$.

Hinweis, wenn R b. erfüllt und $I \trianglelefteq R$ dann betrachte man ein maximales Element $\langle a \rangle$ in der Menge $\mathcal{M} = \{\langle a \rangle \mid a \in I\}$ und zeige $I = \langle a \rangle$. Wieso existiert so ein maximales Element?

Aufgabe 15: Wir betrachten den Ring $R = \mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right] = \{a + b \cdot \sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ und die Abbildungen

$$K : R \longrightarrow R : a + b \cdot \sqrt{2} \mapsto a - b \cdot \sqrt{2}$$

und

$$N : R \longrightarrow \mathbb{Z} : a + b \cdot \sqrt{2} \mapsto \left(a + b \cdot \sqrt{2}\right) \cdot K\left(a + b \cdot \sqrt{2}\right) = a^2 - 2b^2.$$

Man sieht durch Nachrechnen sofort, daß $N(x \cdot y) = N(x) \cdot N(y)$ für $x, y \in R$.

a. Zeige, $x \in R^*$ genau dann, wenn $N(x) \in \{1, -1\}$.

b. Zeige, daß R euklidisch mit $|N|$ als euklidischer Funktion.

c. Zeige, falls $N(x)$ ein Primzahl in $\mathbb{Z}$ ist, so ist x prim in R.

d. Zeige, ist $2 \neq p \in \mathbb{Z}_{>0}$ eine Primzahl und sind $x, y \in R \setminus R^*$ mit $p = x \cdot y$, dann ist x prim und $y = \pm K(x)$, aber x und y sind nicht assoziiert zueinander.

e. Für eine Primzahl $p \in \mathbb{Z}_{>0}$ tritt in R genau einer der folgenden Fälle ein:

(1) $p = 2 = \left(2 + \sqrt{2}\right) \cdot \left(2 - \sqrt{2}\right)$.

(2) $p = \pm x \cdot K(x)$ mit x prim und x nicht assoziiert zu $K(x)$.

(3) p ist prim in R.

f. Die Inklusion $\iota : \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]$ induziert eine stetige Abbildung $\iota^* : \mathrm{Spec}\left(\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]\right) \longrightarrow \mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$. Bestimme die Fasern der Punkte in $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ unter dieser Abbildung.

Anmerkung: aus dem zweiten Ergänzungssatz zum Reziprozitätsgesetz folgt, daß Fall e.(2) genau dann eintritt, wenn $p \equiv \pm 1 (\mathrm{mod}\ 8)$ ist, und Fall e.(3) genau dann, wenn $p \equiv \pm 3 (\mathrm{mod}\ 8)$.