Mathematisches Institut | Sommersemester 2009, Blatt 6

Thomas Markwig | Arne Buchholz

Moderne Geometrie

Abgabetermin: Montag, 25/05/2009, 12:00 Uhr

Aufgabe 20: Es sei M ein R-Modul.

a. Zeige, daß $\mu : M \to \operatorname{Hom}_R(R, M)$ mit $\mu(m) : R \to M : r \mapsto r \cdot m$ ein Isomorphismus ist.

b. Finde ein Beispiel für einen Modul M mit $M \not\cong \operatorname{Hom}_R(M, R)$.

Aufgabe 21: Es sei R ein Integritätsbereich und $0 \neq I \trianglelefteq R$.
Zeige, daß I als R-Modul genau dann frei ist, wenn I ein Hauptideal ist.

Aufgabe 22: Es sei $R = \mathbb{R}[[x]]$ der Ring der formalen Potenzreihen über den reellen Zahlen. Betrachte die R-lineare Abbildung $\varphi : R^3 \to R^2 : m \mapsto A \cdot m$, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 1 + x^4 - x^7 + 3x^{100} & \cos(x) & 2 - \exp(x) \\ x^4 - 5x^8 & \sum_{i=0}^{\infty}(5x + x^2)^i & 0 \end{pmatrix} \in \operatorname{Mat}(2 \times 3, R).$$

Ist φ ein Epimorphismus?

Aufgabe 23: Es sei $p \in \mathbb{Z}$ eine Primzahl. Betrachte den Unterring $R = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, p \not| b \right\} \leq \mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen und betrache $M = \mathbb{Q}$ als R-Modul.

a. Zeige, daß R lokal ist mit maximalem Ideal $\mathfrak{m} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, p \not| b, p \mid a \right\}$.

b. $\mathfrak{m} \cdot M = M$, aber $M \neq 0$.

c. Finde ein Erzeugendensystem für M.