Mathematisches Institut — Sommersemester 2009, Blatt 7
Thomas Markwig — Arne Buchholz

Moderne Geometrie

Abgabetermin: Mittwoch, 03/06/2009, 10:00 Uhr

Aufgabe 24: Es sei R ein Ring, M ein endlich erzeugter R-Modul und $\varphi \in \mathrm{Hom}_R(M, R^n)$ sei surjektiv. Zeige, daß dann auch $\ker(\varphi)$ als R-Modul endlich erzeugt ist.

Hinweis, man beachte, daß die kurze exakte Sequenz $0 \to \ker(\varphi) \to M \to R^n \to 0$ split-exakt ist.

Aufgabe 25: Es sei R ein Ring und P ein R-Modul. Zeige, daß die folgenden Aussagen äquivalent sind:

a. Falls $\varphi \in \mathrm{Hom}_R(M, N)$ surjektiv ist und $\psi \in \mathrm{Hom}_R(P, N)$, dann gibt es ein $\alpha \in \mathrm{Hom}_R(P, M)$, so daß $\varphi \circ \alpha = \psi$, d.h.

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dashed, "\exists\,\alpha"'] \arrow[d, "\psi"] \\ M \arrow[r, two heads, "\varphi"'] & N \end{tikzcd}$$

b. Falls $\varphi \in \mathrm{Hom}_R(M, N)$ surjektiv ist, dann ist $\varphi_* : \mathrm{Hom}_R(P, M) \to \mathrm{Hom}_R(P, N) : \alpha \mapsto \varphi \circ \alpha$ surjektiv.

c. Falls $0 \to M \to N \to P \to 0$ exakt ist, dann ist die Sequenz split-exakt.

d. Es gibt einen freien Modul F und einen Untermodul $M \le F$, so daß $P \oplus M \cong F$.

Aufgabe 26: Es sei $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ eine exakte Sequenz von R-Moduln. Zeige, falls M' und M'' endlich erzeugt sind, dann ist M endlich erzeugt.

Hinweis, man kann das Schlangenlemma und Aufgabe 25 verwenden. Alternativ kann man auch einfach ein Erzeugendensystem hinschreiben.

Aufgabe 27: Es sei R ein Ring, M, M' und M'' seien R-Moduln, $\varphi \in \mathrm{Hom}_R(M', M)$ und $\psi \in \mathrm{Hom}_R(M, M'')$.
Zeige, die Sequenz

$$M' \xrightarrow{\varphi} M \xrightarrow{\psi} M'' \longrightarrow 0$$

ist genau dann exakt, wenn für alle R-Moduln P die induzierte Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M'', P) \xrightarrow{\psi^*} \mathrm{Hom}_R(M, P) \xrightarrow{\varphi^*} \mathrm{Hom}_R(M', P)$$

exakt ist.