Mathematisches Institut — Sommersemester 2009, Blatt 8
Thomas Markwig — Arne Buchholz

Moderne Geometrie

Abgabetermin: Montag, 08/06/2009, 12:00 Uhr

Aufgabe 28: Es sei $(R, \mathfrak{m})$ ein lokaler Ring und $M \oplus R^m \cong R^n$ für ein $n \geq m$. Zeige, dann ist $M \cong R^{n-m}$.

Aufgabe 29: Es sei R' eine R-Algebra und M und N seien R-Moduln. Zeige, daß es einen Isomorphismus von R'-Moduln gibt mit

$$\Phi : \big(M \otimes_R N\big) \otimes_R R' \longrightarrow \big(M \otimes_R R'\big) \otimes_{R'} \big(N \otimes_R R'\big) : m \otimes n \otimes r' \mapsto (m \otimes r') \otimes (n \otimes 1).$$

Wir erinnern uns daran, daß $M \otimes_R R'$ vermittels $r' \cdot (m \otimes s') := m \otimes (r' \cdot s')$ ein R'-Modul wird.

Aufgabe 30: Es sei $(R, \mathfrak{m})$ ein lokaler Ring, und M und N seien endlich erzeugte R-Moduln. Zeige, $M \otimes N = 0$ genau dann, wenn $M = 0$ oder $N = 0$.

Hinweis, verwende Aufgabe 29 und Nakayamas Lemma.

Aufgabe 31: Es sei R ein Ring, M und N seien R-Moduln und $N = \langle n_\lambda \mid \lambda \in \Lambda \rangle$. Zeige:

a. $M \otimes_R N = \left\{ \sum_{\lambda \in \Lambda} m_\lambda \otimes n_\lambda \,\middle|\, m_\lambda \in M \text{ und nur endlich viele } m_\lambda \neq 0 \right\}$.

b. Es sei $x = \sum_{\lambda \in \Lambda} m_\lambda \otimes n_\lambda \in M \otimes_R N$ mit $m_\lambda \in M$ und nur endlich viele $m_\lambda \neq 0$.

Dann gilt $x = 0$ genau dann, wenn es $m'_\theta \in M$ und $a_{\lambda,\theta} \in R$, $\theta \in \Theta$ für eine geeignete Indexmenge Θ, gibt, so daß

$$m_\lambda = \sum_{\theta \in \Theta} a_{\lambda,\theta} \cdot m'_\theta \quad \text{für alle} \quad \lambda \in \Lambda$$

und

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} a_{\lambda,\theta} \cdot n_\lambda = 0 \quad \text{für alle} \quad \theta \in \Theta.$$

Hinweis, für Teil b. betachte man zunächst den Fall, daß N frei in den $(n_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$ ist und zeige, daß in diesem Fall in der Tat alle m_λ Null sein müssen. Dann betrachte man eine freie Präsentation $\bigoplus_{\theta \in \Theta} R \to \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} R \to N \to 0$ von N und tensoriere diese mit M.