Mathematisches Institut
Thomas Markwig

Arne Buchholz

Moderne Geometrie

Abgabetermin: Montag, 15/06/2009, 12:00 Uhr

Aufgabe 32: Es sei $S \subseteq R$ multiplikativ abgeschlossen, und wir betrachten die Ringerweiterung $i : R \to S^{-1}R : r \mapsto \frac{r}{1}$. Zeige, daß die Abbildung

$$\left\{P \in \operatorname{Spec}(R) \;\middle|\; S \cap P = \emptyset\right\} \longrightarrow \operatorname{Spec}\left(S^{-1}R\right) : P \mapsto P^e = S^{-1}P$$

bijektiv ist mit Inverser

$$\operatorname{Spec}\left(S^{-1}R\right) \longrightarrow \left\{P \in \operatorname{Spec}(R) \;\middle|\; S \cap P = \emptyset\right\} : Q \mapsto Q^c = i^{-1}(Q).$$

Insbesondere gilt für jedes Primideal $P \in \operatorname{Spec}(R)$ die Beziehung $(P^e)^c = P$.

Aufgabe 33:

a. Es sei K ein Körper, $R = K[x, y, z]/\langle xz, yz\rangle$ und $P = \langle x, y, z - 1\rangle \trianglelefteq R$. Zeige, $R_P \cong K[z]_{\langle z-1\rangle}$.

b. Es sei R ein Ring und $f \in R$ ein Nicht-Nullteiler. Zeige, $R_f \cong R[x]/\langle fx - 1\rangle$.

Aufgabe 34: Es sei R ein Ring und $\mathfrak{N}(R)$ sein Nilradikal. Zeige:

a. Falls $S \subseteq R$ multiplikativ abgeschlossen ist, dann gilt $\mathfrak{N}(S^{-1}R) = S^{-1}\mathfrak{N}(R)$.

b. Ein Ring heißt *reduziert* falls er keine nilpotenten Elemente außer 0 besitzt. Zeige, daß "reduziert sein" eine lokale Eigenschaft ist, d.h. die folgenden Eigenschaften sind gleichwertig:

   (1) R ist reduziert.

   (2) R_P ist reduziert für jedes $P \in \operatorname{Spec}(R)$.

   (3) $R_\mathfrak{m}$ ist reduziert für jedes $\mathfrak{m} \lhd \cdot R$.

c. Zeige, daß "flach sein" eine lokale Eigenschaft ist, d.h. falls M ein R-Modul ist, dann sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

   (1) M ist ein flacher R-Modul.

   (2) M_P ist ein flacher R_P-Modul für jedes $P \in \operatorname{Spec}(R)$.

   (3) $M_\mathfrak{m}$ ist ein flacher $R_\mathfrak{m}$-Modul für jedes $\mathfrak{m} \lhd \cdot R$.

Hinweis, für Teil c. verwende man Aufgabe 29 und man beachte, daß jeder R_P-Modul N auch ein R-Modul ist und daß dann $N_P = N$ gilt.

Aufgabe 35: Zeige, daß $I := \langle 2, 1 + \sqrt{-5}\rangle \lhd \mathbb{Z}\left[\sqrt{-5}\right] =: R$ als R-Modul projektiv, aber nicht frei ist.

Hinweis, beacht zunächst, daß $2 \in I \cdot I$. Leite daraus ab, daß $I \neq \langle x\rangle$ für alle x, während für jedes Primideal P, das I enthält, I_P von $1 + \sqrt{-5}$ erzeugt wird. Für diese letzte Aussage verwende man das Lemma von Nakayama in geeigneter Weise.