Mathematisches Institut — Sommersemester 2009, Blatt 10
Thomas Markwig — Arne Buchholz

Moderne Geometrie

Abgabetermin: Montag, 22/06/2009, 12:00 Uhr

Für Aufgabe 38 und Aufgabe 39 werden die Ergebnisse der Vorlesung vom Donnerstag benötigt!

Aufgabe 36:

a. Es sei $f \in \mathbb{C}[x,y] \setminus K$, $R = \mathbb{C}[x,y]/\langle f\rangle$, $P = \langle x-a, y-b\rangle \in X = \mathrm{Spec}(R)$, $\alpha = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)$ und $\beta = \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)$. Zeige, daß der Kotangentialraum von X im Punkt P als $\mathbb{C}$-Vektorraum isomorph ist zu

$$\langle x,y\rangle/\langle x^2, xy, y^2, \alpha\cdot x + \beta\cdot y\rangle.$$

b. Bestimme den Kotangentialraum an $X = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[x,y]/\langle x^2-y^3\rangle)$ im Punkt $P = \langle x-1, y-1\rangle \in X$. Interpretiere den zugehörigen Tangentialraum geometrisch.

Aufgabe 37: Es sei M ein R-Modul und $\varphi : M \to M$ eine R-lineare Abbildung. Zeige:

a. Falls M noethersch ist und φ surjektiv, dann ist φ ein Isomorphismus.

b. Falls M artinsch ist und φ injektiv, dann ist φ ein Isomorphismus.

Hinweis, betrachte den Kern bzw. das Bild von φ^n für $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 38: Welche der folgenden Ringe R_i sind noethersch?

a. $R_1 = \left\{\frac{g}{h} \in \mathrm{Quot}(\mathbb{C}[x]) \;\middle|\; h(z) \neq 0 \text{ for } |z| = 1\right\}$.

b. $R_2 = \left\{f \in \mathbb{C}\{x\} \;\middle|\; f \text{ hat unendlichen Konvergenzradius}\right\}$.

c. $R_3 = \left\{f \in \mathbb{C}[x] \;\middle|\; \frac{\partial^i f}{\partial x^i}(0) = 0 \text{ for } i = 1, \ldots, k\right\}$, k fest gegeben.

Aufgabe 39: Es seien $R \subseteq R' \subseteq R''$ Ringe, $R'' = R[a_1, \ldots, a_n]$ eine endlich erzeugte R-Algebra und R'' endlich erzeugt als R'-Modul. Zeige, wenn R noethersch ist, dann ist R' endlich erzeugt als R-Algebra und noethersch.

Erinnerung, $R[a_1, \ldots, a_n] = \{f(a_1, \ldots, a_n) \mid f \in R[x_1, \ldots, x_n]\}$ ist die Menge aller polynomialen Ausdrücke in $a_1, \ldots, a_n$ mit Koeffizienten in R.

Hinweis, falls $R'' = \langle b_1, \ldots, b_m\rangle_{R'}$, dann schreibe man a_i und $b_i \cdot b_j$ als Linearkombinationen der b_ν und betrachte die R-Algebra, die von den Koeffizienten erzeugt wird.