Mathematisches Institut
Thomas Markwig

Sommersemester 2009, Blatt 11

Arne Buchholz

Moderne Geometrie

Abgabetermin: Montag, 29/06/2009, 12:00 Uhr

Die Begriffe isolierte und eingebettete Primärkomponente werden in der Vorlesung am Donnerstag eingeführt.

Aufgabe 40:

a. Es sei $\varphi : R \to R'$ ein Ringhomomorphismus und $Q \lhd R'$ ein P-primäres Ideal. Zeige, daß $Q^c = \varphi^{-1}(Q)$ dann $P^c = \varphi^{-1}(P)$-primär ist.

b. Es sei R ein Ring, $P \in \operatorname{Spec}(R)$ und $n \geq 1$. Zeige, daß die *symbolische Potenz* $P^{(n)} := \{a \in R \mid \exists\, s \in R \setminus P \,:\, s \cdot a \in P^n\}$ ein P-primäres Ideal ist.

Beachte, wenn $\iota : R \to R_P : a \mapsto \frac{a}{1}$, dann ist $P^{(n)} = \big((P^n)^e\big)^c = \iota^{-1}\big(\langle P^n \rangle_{R_P}\big)$.

Aufgabe 41: Es sei R ein Integritätsbereich der Dimension $\dim(R) = 1$ und es sei $0 \neq I \unlhd R$. Zeige, wenn $I = Q_1 \cap \ldots \cap Q_n$ eine minimale Primärzerlegung von I ist, dann gilt $I = Q_1 \cdots Q_n$.

Hinweis, Chinesischer Restsatz.

Aufgabe 42: Finde eine minimale Primärzerlegung von $I = \langle 6 \rangle \lhd \mathbb{Z}\big[\sqrt{-5}\big]$.

Hinweis, betrachte die Ideale $P = \langle 2, 1+\sqrt{-5} \rangle$, $Q = \langle 3, 1+\sqrt{-5} \rangle$ und $Q' = \langle 3, 1-\sqrt{-5} \rangle$.

Aufgabe 43: Es sei $R = K[x, y, z]$ für eine Körper K.

a. Sei $P = \langle x, y \rangle$ und $Q = \langle y, z \rangle$. Berechne eine minimale Primärzerlegung von $I = P \cdot Q$. Welche der Komponenten sind isoliert, welche eingebettet?

b. Berechne eine Primärzerlegung von $J = \langle xz - y^2, y - x^2 \rangle$.

Hinweis, in Teil b. betrachte man den K-Algebrenhomomorphismus $\varphi : R \to K[x]$ mit $x \mapsto x, y \mapsto x^2, z \mapsto x^3$ sowie die Ideale $P = \ker(\varphi)$ und $Q = \langle x, y \rangle$. Zeige, daß $\ker(\varphi) = \langle y - x^2, z - x^3 \rangle$ mittels Division mit Rest.