Mathematisches Institut
Thomas Markwig

Sommersemester 2009, Blatt 12

Arne Buchholz

Moderne Geometrie

Abgabetermin: Montag, 06/07/2009, 12:00 Uhr

Zur Lösung von Aufgabe 47 a. und b. werden die Begriffe der Vorlesung vom Donnerstag benötigt.

Aufgabe 44: Es sei R ein noetherscher Integritätsbereich. Genau dann ist R faktoriell, wenn alle Primideale der Codimension eins Hauptideale sind.

Aufgabe 45: Finde ein Beispiel für einen Ring mit zwei maximalen Ketten von Primidealen unterschiedlicher Länge.

Aufgabe 46: Es sei $(R, \mathfrak{m})$ ein lokaler noetherscher Ring. Zeige, $\dim(R) < \infty$.

Aufgabe 47: [Invariantenringe]

Es sei G eine *endliche* Gruppe und $R = K[\underline{x}]/I$ eine endlich erzeugte K-Algebra, $G \to \mathrm{Aut}_{K-alg}(R)$ ein Gruppenhomomorphismus (wir sagen, daß G auf R via K-Algebrenautomorphismen *operiert*) und wir schreiben $g \cdot f := \alpha(g)(f)$ für $g \in G$ und $f \in R$. Betrachte dann $R^G = \{f \in R \mid g \cdot f = f \ \forall\, g \in G\}$, den *Ring der Invarianten von* G *in* R.

a. Zeige, daß R ganz über R^G ist.

b. Zeige, daß R^G eine endlich erzeugte K-Algebra und somit noethersch ist.

c. Es seien $\mathrm{Mon}_{\underline{x}} = \{0\} \cup \{\underline{x}^\alpha \mid \alpha \in \mathbb{N}^n\}$, $\mathrm{Mon}(f) = \{\underline{x}^\alpha \mid a_\alpha \neq 0\}$ für $0 \neq f = \sum_\alpha a_\alpha \underline{x}^\alpha \in K[\underline{x}]$ und $\mathrm{Mon}(0) = \{0\}$. Wir definieren eine *Wohlordnung* auf $\mathrm{Mon}_{\underline{x}}$ durch $\underline{x}^\alpha > 0$ für alle α und

$$\underline{x}^\alpha > \underline{x}^\beta \iff \deg(\underline{x}^\alpha) > \deg(\underline{x}^\beta) \quad \text{oder}$$
$$(\deg(\underline{x}^\alpha) = \deg(\underline{x}^\beta) \quad \text{und} \quad \exists\, i : \alpha_1 = \beta_1, \ldots, \alpha_{i-1} = \beta_{i-1}, \alpha_i > \beta_i),$$

und wir nennen $\mathrm{lm}(f) = \max\big(\mathrm{Mon}(f)\big)$ das *Leitmonom von* f.

Zeige, $(\underline{x}^\alpha > \underline{x}^\beta \implies \underline{x}^\alpha \cdot \underline{x}^\gamma > \underline{x}^\beta \cdot \underline{x}^\gamma)$, und mithin $\mathrm{lm}(f \cdot g) = \mathrm{lm}(f) \cdot \mathrm{lm}(g)$.

d. Betrachte den Gruppenhomomorphismus

$$\mathrm{Sym}(n) \longrightarrow \mathrm{Aut}_{K-alg}\big(K[x_1, \ldots, x_n]\big) : \sigma \mapsto \big(f \mapsto f(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}\big),$$

und das Polynom $(X + x_1) \cdots (X + x_n) = X^n + s_1 X^{n-1} + \ldots + s_n \in K[x_1, \ldots, x_n][X]$.

Zeige, $K[x_1, \ldots, x_n]^{\mathrm{Sym}(n)} = K[s_1, \ldots, s_n]$.

Hinweis, man verwende zur Lösung von b. Aufgabe 39, und für Teil d. zeige man zunächst, daß $\underline{x}^\alpha = \mathrm{lm}(f)$ für $f \in K[x_1, \ldots, x_n]^{\mathrm{Sym}(n)}$ impliziert, daß $\alpha_1 \geq \ldots \geq \alpha_n$ und daß es ein $g \in K[s_1, \ldots, s_n]$ mit $\mathrm{lm}(f) = \mathrm{lm}(g)$ gibt. Dies kann man dann verwenden, um mit Induktion nach dem Leitmonom $\mathrm{lm}(f)$ zu zeigen, daß in der Tat $f \in K[s_1, \ldots, s_n]$. Man beachte, $s_i = \sum_{1 \leq j_1 < \ldots < j_i \leq n} x_{j_1} \cdots x_{j_i}$. Was ist dann $\mathrm{lm}(s_i)$?