Mathematisches Institut
Thomas Markwig

Sommersemester 2009, Blatt 13
Arne Buchholz

Moderne Geometrie

Abgabetermin: Montag, 13/07/2009, 12:00 Uhr

Aufgabe 48: Es sei K ein Körper und $\overline{K}$ sein algebraischer Abschluß.

Zeige, daß $\overline{K}[x_1,\ldots,x_n]$ ganz über $K[x_1,\ldots,x_n]$ ist.

Aufgabe 49: Sei $R \subset R'$ eine ganze Ringerweiterung und $\mathfrak{m}' \lhd\cdot R'$ sei ein maximales Ideal, so daß $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}' \cap R \lhd\cdot R$ ebenfalls maximal ist. Ist $R'_{\mathfrak{m}'}$ dann ganz über $R_{\mathfrak{m}}$?

Hinweis, betrachte $R = K[x^2-1]$, $R' = K[x]$, $\mathfrak{m}' = \langle x-1\rangle$, und $f = \frac{1}{1+x} \in R'_{\mathfrak{m}'}$.

Aufgabe 50: Es seien $R \subset R'$ Integritätsbereiche und $f, g \in R'[x]$ seien normierte Polynome. Zeige, wenn $f\cdot g \in \mathrm{Int}_{R'}(R)[x]$, dann gilt auch $f, g \in \mathrm{Int}_{R'}(R)[x]$.

Beachte, wenn wir dies auf $R = \mathbb{Z}$ und $R' = \mathbb{Q}$ anwenden, dann erhalten wir für normierte Polynomie $f, g \in \mathbb{Q}[x]$, daß aus $f\cdot g \in \mathbb{Z}[x]$ unmittelbar $f, g \in \mathbb{Z}[x]$ folgt.

Aufgabe 51: [Ringe ganzer Zahlen in quadratischen Zahlkörpern]

Es sei $d \in \mathbb{Z}\setminus\{0,1\}$ eine quadratfreie Zahl (d.h. keine Quadratzahl $a^2 \neq 1$ teilt d). Dann ist $\mathbb{Q}\big[\sqrt{d}\,\big] = \{a + b\sqrt{d} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ eine Körpererweiterung von $\mathbb{Q}$ mit $\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}\big[\sqrt{d}\,\big] = 2$. Betrachte die *Konjugation*

$$C : \mathbb{Q}\big[\sqrt{d}\,\big] \longrightarrow \mathbb{Q}\big[\sqrt{d}\,\big] : a + b\sqrt{d} \mapsto a - b\sqrt{d},$$

die *Norm*

$$N : \mathbb{Q}\big[\sqrt{d}\,\big] \longrightarrow \mathbb{Q} : a + b\sqrt{d} \mapsto (a + b\sqrt{d})\cdot C(a + b\sqrt{d}) = a^2 - b^2 d,$$

und die *Spur*

$$T : \mathbb{Q}\big[\sqrt{d}\,\big] \longrightarrow \mathbb{Q} : a + b\sqrt{d} \mapsto (a + b\sqrt{d}) + C(a + b\sqrt{d}) = 2a.$$

Zeige:

a. $C(x\cdot y) = C(x)\cdot C(y)$ und $N(x\cdot y) = N(x)\cdot N(y)$ für $x, y \in \mathbb{Q}\big[\sqrt{d}\,\big]$.

b. C und T sind $\mathbb{Q}$-linear.

c. Wenn $x \in \mathbb{Q}\big[\sqrt{d}\,\big]\setminus\mathbb{Q}$, dann ist $\mu_x = (t - x)\cdot\big(t - C(x)\big) = t^2 - T(x)\cdot t + N(x) \in \mathbb{Q}[t]$ das Minimalpolynom von x über $\mathbb{Q}$.

d. $x \in \mathbb{Q}\big[\sqrt{d}\,\big]$ ist genau dann ganz über $\mathbb{Z}$, wenn $T(x)$ und $N(x)$ ganze Zahlen sind.

e. $\mathrm{Int}_{\mathbb{Q}\left[\sqrt{d}\right]}(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[\omega_d]$, wobei $\omega_d = \begin{cases} \sqrt{d}, & \text{falls } d \equiv 2, 3 \bmod 4,\\ \frac{1+\sqrt{d}}{2}, & \text{falls } d \equiv 1 \bmod 4.\end{cases}$