Mathematisches Institut | Sommersemester 2009, Blatt 14
Thomas Markwig | Arne Buchholz

Moderne Geometrie

Die Aufgaben werden nicht mehr korrigiert und auch nicht mehr besprochen.

Aufgabe 52: Zeige mit Hilfe von Hilberts Nullstellensatz und Aufgabe 48

$$\dim(K[x_1, \ldots, x_n]) = n$$

für jeden Körper K.

Hinweis, für $\overline{K}[x_1, \ldots, x_n]$ ziehe man sich auf den lokalen Fall zurück.

Aufgabe 53: Sei $K \subseteq K'$ eine *Körpererweiterung*, und sei $T \subset K'$ (nicht notwendigerweise endlich). T heißt *algebraisch unabhängig* über K falls jede endliche Teilmenge von T algebraisch unabhängig über K ist. Eine algebraisch unabhängige Menge T heißt *Transzendezbasis* von K'/K, falls $T \cup \{t'\}$ für jedes $t' \in K' \setminus T$ algebraisch abhängig ist. Zeige:

a. Eine algebraisch unabhängige Menge T ist genau dann eine Transzendenzbasis von K'/K, wenn K' ganz ist über

$$K(T) = \left\{ \frac{f(t_1, \ldots, t_n)}{g(t_1, \ldots, t_n)} \mid f, g \in K[x_1, \ldots, x_n], t_1, \ldots, t_n \in T, n \geq 1 \right\}.$$

b. Wenn T und T' Transzendenzbasen von K'/K sind und $t \in T$, dann gibt es ein $t' \in T'$, so daß $(T \setminus \{t\}) \cup \{t'\}$ eine Transzendenzbasis von K'/K ist.

c. Wenn T und T' Transzendenzbasen von K'/K sind, $|T| < \infty$, dann gilt

$$\mathrm{trdeg}_K(K') = |T| = |T'|.$$

d. $\mathrm{trdeg}_K\big(K(x_1, \ldots, x_n)\big) = n$.

Hinweis für Teil b., falls $T_0 = T \setminus \{t\}$, dann betrachte man die Körpererweiterungen $K(T_0) \subset K'$, $K(T' \cup T_0) \subset K'$ und $K(T_0) \subset K(T' \cup T_0) = K(T_0)(T')$. Welche dieser Erweiterungen sind ganz (d.h. algebraisch)?

Aufgabe 54: Zeige, daß $\mathrm{trdeg}_K\big(K[x_1, \ldots, x_n]/\langle f \rangle\big) = n - 1$ für $f \in K[x_1, \ldots, x_n] \setminus K$.

Aufgabe 55: Es sei R eine endlich erzeugte nullteilerfreie K-Algebra und es sei $K' = \mathrm{Quot}(R)$. Zeige, $\mathrm{trdeg}_K(R) = \mathrm{trdeg}_K(K')$.