Fachbereich Mathematik
Thomas Markwig

Wintersemester 2019, Blatt 3

Christian Mauz

Mathematik 1 für Informatiker

Abgabetermin: **!!! Donnerstag**, 31.10.2019, 10:00

Aufgabe 9:

(a) Gib für **zwei** der folgenden Abbildungsvorschriften die maximale Teilmenge von $\mathbb{R}$ an, die als Definitionsbereich in Frage kommt, und berechne jeweils auch das Bild der Abbildung:

(1) $f(x) = \frac{1}{x}$,

(2) $g(x) = x^2 - 4$,

(3) $h(x) = \sqrt{(g \circ f)(x)}$,

(4) $k(x) = \frac{1}{g(x)}$.

(b) Bestimme die Menge $(h \circ g \circ f)^{-1}(B)$ für $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 3\}$ und

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x \mapsto (x, x-2),$$

$$g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{R} : (x, y) \mapsto \begin{cases} (1, x \cdot y), & \text{wenn } x > y \\ (-1, x \cdot y), & \text{wenn } x \leq y, \end{cases}$$

$$h : \mathbb{Z} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : (z, x) \mapsto x^z.$$

Aufgabe 10: Überprüfe **zwei** der folgenden Abbildungen auf Injektivität, Surjektivität und Bijektivität:

(a) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{x^2+1}$,

(b) $g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\} : x \mapsto \frac{1}{x}$,

(c) $h : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto 2x + y$,

(d) $k : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R} : (x, y) \mapsto (x + y, x - y)$.

Zeige oder widerlege jeweils, daß die Abbildung die jeweilige Eigenschaft besitzt, und gib im Falle der Bijektivität auch die Umkehrabbildung an.

Aufgabe 11: Seien M, N Mengen, $A_1, A_2 \subseteq M$ und $B, B_1, B_2 \subseteq N$ Teilmengen und $f : M \longrightarrow N$ eine Abbildung. Beweise **zwei** der folgenden Aussagen:

(a) $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$.

(b) $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$.

(c) $f(A_1 \setminus A_2) \supseteq f(A_1) \setminus f(A_2)$.

Finde zudem Beispiele, bei denen in (b) und (c) die Inklusionen echt sind.

Aufgabe 12: Beweise mittels vollständiger Induktion:

(a) $3^n - 3$ ist für alle $n \geq 1$ durch 6 teilbar.

(b) $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n-1}} + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}$ für alle $n \geq 2$.