Fachbereich Mathematik — Wintersemester 2019, Blatt 5
Thomas Markwig — Christian Mauz

Mathematik 1 für Informatiker

Abgabetermin: Freitag, 15.11.2019, 10:00

Aufgabe 17:

(a) Gib alle möglichen Ordnungsrelationen auf der 2-elementigen Menge $M = \{a, b\}$ als Teilmengen von $M \times M$ an. Begründe, weshalb dies alle sind.

(b) Für zwei Tupel $(a, b), (c, d) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definieren wir

$$(a, b) \ \leq \ (c, d) \ \ :\Longleftrightarrow \ \ a + b < c + d \ \text{ oder } \ (a + b = c + d \ \text{ und } \ a \leq c).$$

Zeige, $\leq$ ist eine Wohlordnung auf der Menge $M = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ und stelle graphisch (in der Ebene) dar, wie die Tupel (a, b) mit $a + b \leq 4$ angeordnet sind.

Aufgabe 18:

(a) Schreibe die folgenden Mengen als Vereinigung von Intervallen:

(1) $A_1 = \left\{x \in \mathbb{R} \mid |x - 1| < 1 \ \vee \ |x + 2| \leq 2\right\}$.
(2) $A_2 = \left\{x \in \mathbb{R} \mid |x - 1| > 1 \ \wedge \ |x + 2| \leq 2\right\}$.
(3) $A_3 = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 2 \leq 2 \ \vee \ \sqrt{|x - 10|} > 5\right\}$.

(b) Überprüfe zudem jede der Mengen in Teil (a) sowie die folgende Menge, ob sie nach oben oder unten beschränkt ist, gib ggf. das Infimum oder Supremum der Menge an und überprüfe auch, ob es ein Minimim oder Maximum ist:

$$M = \left\{\frac{m - n}{m + n} \mid 0 \neq m, n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Aufgabe 19: Sei K ein angeordneter Körper und $A, B \subseteq K$ Teilmengen, so daß $\sup(A)$ und $\sup(B)$ existieren. Wir setzen $A + B := \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$. Beweise, daß auch $\sup(A + B)$ existiert und $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$ gilt.

Aufgabe 20: Beweise **zwei** der drei folgenden Aussagen:

(a) Für zwei natürliche Zahlen $1 \leq k \leq n$ gilt

$$k \cdot \binom{n}{k} = n \cdot \binom{n-1}{k-1}.$$

(b) Für je zwei reelle Zahlen $x, y \in \mathbb{R}$ gilt

$$\max\{x, y\} = \frac{1}{2} \cdot (x + y + |x - y|).$$

(c) Für je drei reelle Zahlen $x, y, z \in \mathbb{R}$ gilt

$$\frac{|x - z|}{1 + |x - z|} \leq \frac{|x - y|}{1 + |x - y|} + \frac{|y - z|}{1 + |y - z|}.$$

Hinweis: in Teil c. darf man die Dreiecksungleichung des Betrags verwenden, siehe Lemma 10.7. Für die Definition des Betrags sei auch noch mal auf Definition 10.5 verwiesen.