Fachbereich Mathematik | Wintersemester 2019, Blatt 7
Thomas Markwig | Christian Mauz

Mathematik 1 für Informatiker

Abgabetermin: Freitag, 29.11.2019, 10:00

Für die Lösung der Aufgaben 27 und 28 werden die Inhalte der Vorlesung vom Montag, den 25.11., benötigt.

Aufgabe 25: Welche der folgenden Folgen $(a_n)_{n\geq 1}$ sind monoton, beschränkt, konvergent oder bestimmt divergent? Es ist keine Begründung erforderlich, es darf aber eine Begründung gegeben werden.

(a) $a_n = 5$

(b) $a_n = \frac{1}{(-1)^n}$

(c) $a_n = \frac{(-1)^n}{n^2}$

(d) $a_n = \frac{3}{n}$

(e) $a_n = \frac{n}{n+1}$

(f) $a_n = \frac{n+1}{n}$

(g) $a_n = -n$

(h) $a_n = n^2 - n$

(i) $a_n = 2^n$

(j) $a_n = (-2)^n$

(k) $a_1 = 1$ und $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{n}$ für $n \geq 1$.

(l) $a_1 = 1$ und $a_{n+1} = \frac{n}{n+1} \cdot a_n$ für $n \geq 1$.

Aufgabe 26: Die Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ sei rekursiv definiert durch $a_1 = 5$ und

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + \frac{2}{a_n}.$$

(a) Zeige mit Induktion nach n, daß $a_n \geq 2$ für alle $n \geq 1$ gilt.

(b) Zeige, die Folge ist monoton fallend.

(c) Zeige, die Folge ist konvergent und bestimme den Grenzwert.

Aufgabe 27:

(a) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen, so dass $|a_{n+1} - a_n| < \frac{1}{2^n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeige, daß die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge und mithin konvergent ist.

(b) Bleibt die Behauptung aus Aufgabenteil (a) korrekt, wenn wir die Bedingung $|a_{n+1} - a_n| < \frac{1}{n}$ voraussetzen? Gib einen Beweis oder ein Gegenbeispiel an.

Aufgabe 28:

(a) Bei Algorithmen wendet man oft das Verfahren *divide and conquer* an. Im einfachsten Fall *teilt* man dabei ein Problem mit Kenngröße $n \geq 1$ in zwei gleich große Teilprobleme der Größe $n-1$ auf. Diese löst man dann rekursiv durch weiteres Aufteilen und setzt die Teillösungen anschließend zusammen.

Nehmen wir an, daß für die Lösung des Problems für $n = 1$ eine Zeiteinheit benötigt wird und daß für das Zerlegen des Problems der Größe n in zwei Teilprobleme der Größe $n-1$ sowie für das Zusammensetzen der Lösungen der zwei Teilprobleme zur Lösung des Problems der Größe n jeweils wieder eine Zeiteinheit benötigt wird. Zudem beschreibe a_n den Aufwand in Zeiteinheiten, zur Lösung des Problems der Größe n.

(1) Leite eine Rekursionsvorschrift für die Folge a_n her, d.h. beschreibe a_{n+1} in Abhängigkeit von a_n.

(2) Bestimme eine explizite Formel für a_n.

(3) Zeige, $a_n \in \mathcal{O}(2^n)$.

(b) Ordne die folgenden Folgen dergestalt, daß für zwei aufeinander folgende Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ stets $a_n \in o(b_n)$ gilt und begründe die Korrektheit der Anordnung:

$$(7n^3)_{n\in\mathbb{N}}, \quad \left(\sqrt{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}, \quad (5^n)_{n\in\mathbb{N}}, \quad \left(10^{4^{10}}\right)_{n\in\mathbb{N}}, \quad \left(\left(\frac{1}{10}\right)^{n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}}, \quad (10n+3)_{n\in\mathbb{N}}.$$