Fachbereich Mathematik — Wintersemester 2019, Blatt 10
Thomas Markwig — Christian Mauz

Mathematik 1 für Informatiker

Abgabetermin: Freitag, 20.12.2019, 10:00

Aufgabe 37:

(a) Bestimme für **zwei** der folgenden Mengen jeweils die Menge aller ihrer Häufungspunkte:

(1) $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\}$.

(2) $B = \mathbb{N}$.

(3) $C = \left\{ (-1)^n + \left(\frac{-1}{n}\right)^n \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\}$.

(b) Gib ein Beispiel für eine Menge, die genau drei Häufungspunkte hat.

(c) Bestimme **zwei** der folgenden Grenzwerte oder zeige, daß sie nicht existieren:

(1) $\lim\limits_{x \to 3} \frac{x^3-9x}{x-3}$.

(2) $\lim\limits_{x \to 5} \frac{2x^4+x^3-3x^2+4}{x^2-5}$.

(3) $\lim\limits_{x \to \infty} \sqrt{\frac{2x^3+5x}{(x+1)^3}}$.

(4) $\lim\limits_{x \to \infty} \sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x}$.

Aufgabe 38:

(a) Entscheide, ob die folgende Funktion in $a = -2$ stetig ist

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} \frac{4x^2+x+1}{1-x}, & \text{falls } x < -2, \\ |x-1|, & \text{falls } x \geq -2. \end{cases}$$

(b) Bestimme eine reelle Zahl b, so daß die folgende Funktion stetig ist:

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} x^2 - b, & \text{falls } x < 0, \\ \sqrt{x} + b, & \text{falls } x \geq 0. \end{cases}$$

Aufgabe 39: Es sei $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge in $\mathbb{R}$, so daß die Folge $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert.

(a) Zeige durch ein Beispiel, daß die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht konvergieren muß.

(b) Zeige, wenn f stetig und streng monoton ist, dann ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent.

Aufgabe 40:

(a) Zeige, ist $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f(0) = f(1)$. Zeige, dann gibt es ein $a \in [0, \frac{1}{2}]$ mit $f(a) = f(a + \frac{1}{2})$.

Hinweis, betrachte die Hilfsfunktion $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto f(x) - f(x + \frac{1}{2})$.

(b) Es sei $U \subseteq \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ ein Häufungspunkt von U und $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Zeige, der Grenzwert $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ existiert genau dann, wenn

$$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, \delta_\varepsilon > 0 \;:\; \forall\, x, y \in \big(U \cap U_{\delta_\varepsilon}(a)\big) \setminus \{a\} \;\text{ gilt } |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Präsenzaufgabe 1: Löse die folgenden Gleichungen für $x \in \mathbb{R}$:

(a) $\log_2(x) - \log_2(x - 6) = 3$.

(b) $4^x + 4 = 2^{x+2} + 2^x$.