Fachbereich Mathematik
Thomas Markwig

Wintersemester 2019, Blatt 11

Christian Mauz

Mathematik 1 für Informatiker

Abgabetermin: Freitag, 10.01.2020, 10:00

Aufgabe 41: Wir betrachten die Funktionenfolge $(f_n)_{n\geq 1}$ mit

$$f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{1+|x|^n}.$$

(a) Zeige, die Funktionenfolge konvergiert punktweise gegen eine Grenzfunktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ und gib die Werte $f(1)$, $f(\frac{1}{2})$ und $f(2)$ an.

(b) Skizziere den Graphen der Grenzfunktion f.

(c) Welche der folgenden Grenzwerte existieren?

(1) $\lim_{x\to 1} f(x)$ für $x \in (1, \infty)$.

(2) $\lim_{x\to 1} f(x)$ für $x \in (-1, 1)$.

(3) $\lim_{x\to 1} f(x)$ für $x \in \mathbb{R}$.

(d) An welchen Stellen $a \in \mathbb{R}$ ist die Funktion f stetig.

Aufgabe 42:

(a) Löse die folgenden Gleichungen für $x \in \mathbb{R}$:

(1) $\log_4(x+2) - \log_4(x-2) = \frac{1}{2}$.

(2) $2^{3-x} \cdot 3^{x-1} = 6^{2x-3}$.

(b) Computer speichern Daten in Form von Bits, d.h. in Variablen, die nur die Wert 0 oder 1 annehmen können.

(1) Wie viele Bits benötigt ein Computer, um die Zahl 65^{365} zu speichern?

(2) Ein Algorithmus benötige bei einem Eingabedatum mit n Bits $n\log_2(n)$ Rechenschritte. Berechne die Laufzeit in Rechenschritten für die Wert $n = 10$, $n = 256$ und $n = 1000$.

(3) Was ist die kleinste Eingabe in Bits, für die der Algorithmus mindestens 100 Rechenschritte benötigt?

Aufgabe 43: Bestimme das Bild der folgenden Funktionen f und entscheide, ob diese injektiv sind. Falls die Umkehrfunktion $f^{-1} : \mathrm{Im}(f) \longrightarrow \mathbb{R}$ existiert, ist sie dann stetig?

(a) $f : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \log_2(x^2 + 1)$.

(b) $f : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \sum_{n=1}^{20} \frac{x}{n} \cdot e^{nx^2+n}$.

Aufgabe 44:

(a) Sei $f : (a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Zeige, dass f genau dann stetig in a fortsetzbar ist, wenn f gleichmäßig stetig ist.

(b) Gibt es eine beschränkte Funktion $f : (0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$, die sich nicht stetig in 0 fortsetzen lässt?

Präsenzaufgabe 1: Zeige, für $x \in \mathbb{R}$ gilt stets

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(x)$$

und

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin(x).$$

Präsenzaufgabe 2: Bestimme mittels der Ableitungsregeln die Ableitung der folgenden Funktionen:

(a) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto 10 + x \cdot \cos(x)$.

(b) $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto e^{-3x} \cdot \left(x^3 - 2x\right)^2$.