Fachbereich Mathematik — Wintersemester 2019, Blatt zur Forumsdiskussion

Thomas Markwig — Christian Mauz

Mathematik 1 für Informatiker

Die Aufgaben brauchen nicht mehr eingereicht zu werden und werden auch nicht mehr korrigiert. Sie dienen allein der Vorbereitung auf die Klausur und können im Forum diskutiert werden.

Aufgabe 1: Ordne die folgenden Folgen dergestalt, daß für zwei aufeinander folgende Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ stets $a_n \in o(b_n)$ gilt und begründe die Korrektheit der Anordnung:

$$\big(\log(n)\big)_{n\in\mathbb{N}}, \quad \big(\sqrt{n^3}\big)_{n\in\mathbb{N}}, \quad (n^2+n+7)_{n\in\mathbb{N}}, \quad \left(\left(\frac{1}{10}\right)^{n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}}, \quad (n^n)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Aufgabe 2: Untersuche die fogenden Folgen $(a_n)_{n\geq 1}$, ob sie konvergent oder divergent sind und bestimme ggf. ihren Grenzwert:

(a) $a_n = \frac{n^2+(-1)^n}{n^2+1}$

(b) $a_n = \frac{5^n+2^{n+1}}{3^n+2^{n-1}}$

(c) $a_n = (-1)^n \cdot \frac{1+\sin(n)}{2+n}$

(d) $a_n = \frac{1+\sqrt{n-1}}{n+1}$

Aufgabe 3: Beweise die folgende Gleichung für alle $n \geq 1$ durch vollständige Induktion:

$$\sum_{k=1}^{n}(3k-2) = \frac{n\cdot(3n-1)}{2}.$$

Aufgabe 4: Überprüfe die folgende Abbildung auf Injektivität und Surjektivität:

$$f : \mathbb{N}\times\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z} : (n,m) \mapsto n-m.$$

Aufgabe 5: Bestimme die Häufungspunkte der Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ mit

$$a_n = \cos(n\cdot\pi)+3.$$

Aufgabe 6: Überprüfe die folgenden Reihen auf Konvergenz:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n)}{n^2+3}$.

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^{2n+1}}{n!}$.

Aufgabe 7: Bestimme für die folgende Potenzreihe den Konvergenzradius:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+1}{3^{2n+1}} \cdot t^n.$$

Aufgabe 8: Überprüfe, ob die folgenden Funktion stetig oder differenzierbar ist:

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} x+3, & \text{wenn } x < 0, \\ -3 \cdot \cos(\pi - x), & \text{wenn } x \geq 0. \end{cases}$$

Aufgabe 9: Berechne die Ableitungen der folgenden Funktionen:

(a) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto 10 + x \cdot \cos(x) + (x^2 - 5x + 1)^3$.

(b) $g : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \tan(x) \cdot \cos(x^2)$.

Aufgabe 10: Berechne die Ableitung der folgenden Funktion an der Stelle $x = \pi$:

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \log_3 \left(e^{(x^2+1)\cdot\cos(x)} \right).$$

Aufgabe 11: Berechne den folgenden Grenzwert:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3+x}{2x^3-5} \cdot \left(\frac{\cos(x)}{x} + 1 \right).$$

Aufgabe 12: Berechne das folgende Integral:

$$\int_e^{3e} \frac{1}{x \cdot \ln(x)} \, dx.$$

Aufgabe 13: Berechne das folgende uneigentliche Integral:

$$\int_{-\infty}^{0} e^x \, dx.$$

Aufgabe 14: Sei $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig und $a, b \in \mathbb{R}$ mit $f(a) \neq b$. Zeige, es gibt ein $\delta > 0$, so dass $f(x) \neq b$ für alle $x \in (a - \delta, a + \delta)$.

Aufgabe 15: Sei $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$ und $f(1) = a > 0$. Zeige, dann ist $f = \exp_a$.

Aufgabe 16: Seien M, N Mengen, $A_1, A_2 \subseteq M$ und $B, B_1, B_2 \subseteq N$ Teilmengen und $f : M \longrightarrow N$ eine Abbildung. Beweise die folgender Aussage:

$$f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2)$$

Gib außerdem ein konkretes Beispiel an, in dem keine Gleichheit gilt.