Fachbereich Mathematik
Thomas Markwig

Wintersemester 2023, Blatt 4

Matilde Manzaroli

Mathematik für Informatik 1: Analysis

Abgabetermin: Freitag, 10.11.2023, 10:00

Aufgabe 13: Beweise zwei der folgenden Aussagen mittels vollständiger Induktion:

(a) Für $n \geq 2$ gilt $\prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k}\right) = \frac{1}{n}$.

(b) Für $n \in \mathbb{N}$ gilt $\sum_{k=0}^{n} (k+1) \cdot \binom{n}{k} = 2^{n-1} \cdot (n+2)$.

(c) Für $n \geq 2$ gilt $\frac{4^n}{n+1} < \frac{(2n)!}{(n!)^2}$.

Aufgabe 14:

(a) Sei M eine Menge und $N := \{g \mid g : M \to \{0,1\} \text{ Abbildung}\}$. Zeige, die Menge N ist gleichmächtig zur Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$.

(b) Sei M eine Menge. Zeige, die Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ wird mittels der symmetrischen Differenz

$$A + B := (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

für $A, B \in \mathcal{P}(M)$ eine abelsche Gruppe.

Aufgabe 15: Bearbeite eine der beiden Teilaufgaben.

(a) Für zwei reelle Zahlen $x, y \in \mathbb{R}$ definieren wir

$$x \sim y \quad :\Longleftrightarrow \quad x^2 - y^2 = 2x - 2y.$$

Zeige, daß $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{R}$ ist und bestimme die Äquivalenzklassen von 0 und 1.

(b) Ist $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ eine positive ganze Zahl, so definieren wir für $x, y \in \mathbb{Z}$

$$x \equiv y \;:\Longleftrightarrow\; x - y \text{ ist ein Vielfaches von } n.$$

Zeige, daß $\equiv$ eine Äquivalenzrelation ist mit genau den n paarweise verschiedenen Äquivalenzklassen $\overline{0}, \overline{1}, \ldots, \overline{n-1}$.

Aufgabe 16: Zeige, daß die Menge $G = (\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \setminus \{(0,0)\}$ mit der zweistelligen Operation

$$(a, b) \cdot (a', b') := (aa' - bb', ab' + ba')$$

für $(a, b), (a', b') \in G$ eine abelsche Gruppe ist.