

Mathematik für Informatik 1: Analysis

Abgabetermin: Freitag, 17.11.2023, 10:00

Aufgabe 17: Bearbeite **eine** der beiden folgenden Teilaufgaben:

(a) Gib alle möglichen Ordnungsrelationen auf der 2-elementigen Menge $M = \{a, b\}$ als Teilmengen von $M \times M$ an. Begründe, weshalb dies alle sind.

(b) Für zwei Tupel $(a, b), (c, d) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definieren wir

$$(a, b) \leq (c, d) :\iff a + b < c + d \text{ oder } (a + b = c + d \text{ und } a \leq c).$$

Zeige, \leq ist eine Wohlordnung auf der Menge $M = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ und stelle graphisch (in der Ebene) dar, wie die Tupel (a, b) mit $a + b \leq 4$ angeordnet sind.

Aufgabe 18:

(a) Schreibe die folgenden Mengen als Vereinigung von Intervallen:

$$(1) A_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - 1| < 1 \vee |x + 2| \leq 2\}.$$

$$(2) A_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - 1| > 1 \wedge |x + 2| \leq 2\}.$$

$$(3) A_3 = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 2 \leq 2 \vee \sqrt{|x - 10|} > 5\}.$$

(b) Überprüfe zudem jede der Mengen in Teil (a) sowie die folgende Menge, ob sie nach oben oder unten beschränkt ist, gib ggf. das Infimum oder Supremum der Menge an und überprüfe auch, ob es ein Minimum oder Maximum ist:

$$M = \left\{ \frac{m - n}{m + n} \mid 0 \neq m, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Aufgabe 19: Sei K ein angeordneter Körper und $A, B \subseteq K$ Teilmengen, so daß $\sup(A)$ und $\sup(B)$ existieren. Wir setzen $A + B := \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$. Beweise, daß auch $\sup(A + B)$ existiert und $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$ gilt.

Aufgabe 20: Beweise **zwei** der drei folgenden Aussagen:

(a) Für zwei natürliche Zahlen $1 \leq k \leq n$ gilt

$$k \cdot \binom{n}{k} = n \cdot \binom{n-1}{k-1}.$$

(b) Für je zwei reelle Zahlen $x, y \in \mathbb{R}$ gilt

$$\max\{x, y\} = \frac{1}{2} \cdot (x + y + |x - y|).$$

(c) Für je drei reelle Zahlen $x, y, z \in \mathbb{R}$ gilt

$$\frac{|x - z|}{1 + |x - z|} \leq \frac{|x - y|}{1 + |x - y|} + \frac{|y - z|}{1 + |y - z|}.$$