Fachbereich Mathematik | Wintersemester 2023, Blatt 6
Thomas Markwig | Matilde Manzaroli

Mathematik für Informatik 1: Analysis

Abgabetermin: Freitag, 24.11.2023, 10:00

Aufgabe 21:

(a) Beweise die folgende Aussage für zwei komplexe Zahlen $z, w \in \mathbb{C}$: $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$.

(b) Bestimme $\operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z$, $|z|$, $\overline{z}$ und z^{-1} für die komplexen Zahl $z = \frac{4+2i}{2-2i}$.

(c) Berechne die komplexe Zahl $\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right)^{4n}$ für jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$.

Hinweis: In Teil (c) sollte man sich die Zahl in der Klammer zunächst mal in Polarkoordinaten hinschreiben.

Aufgabe 22:

(a) Bestimme für die in der folgenden Tabelle angegebenen Nullfolgen $(a_n)_{n\geq 1}$ und für jedes der angegebenen $\varepsilon > 0$ eine natürliche Zahl n_ε, so daß $|a_n - 0| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_\varepsilon$:

	$\varepsilon = \frac{1}{4}$	$\varepsilon = \frac{1}{16}$	$\varepsilon = \frac{1}{32}$
$a_n = \frac{1}{n^2}$			
$a_n = \frac{n^2}{2^n}$			
$a_n = \frac{n+1}{n} - 1$			

(b) Zeige mit Hilfe der Definition des Grenzwertes, daß $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2+1}{4n^2} = \frac{1}{4}$.

(c) Gib zwei divergente Folgen an, deren Produkt konvergiert. Begründe Deine Antwort.

Aufgabe 23: Untersuche **drei** der folgenden Folgen $(a_n)_{n\geq 1}$, ob sie konvergent oder divergent sind und bestimme ggf. ihren Grenzwert:

(a) $a_n = \frac{n+(-1)^n}{n+1}$

(b) $a_n = \frac{(n-1)^3}{n^3+1}$

(c) $a_n = \frac{3^{n+1}+2^{n+1}}{3^n+2^n}$

(d) $a_n = (-1)^n \cdot \frac{1-n}{2+n}$

(e) $a_n = \sqrt{n^2+3n} - \sqrt{n^2-n}$

(f) $a_n = \frac{n^3-2n+1}{n^2+1}$

Aufgabe 24: Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{K}$ und $\sigma : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ bijektiv, so nennen wir die Folge

$$\left(a_{\sigma(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}} = \left(a_{\sigma(0)}, a_{\sigma(1)}, a_{\sigma(2)}, a_{\sigma(3)}, \ldots\right)$$

eine *Umordnung* von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Zeige, wenn $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, so konvergiert jede Umordnung von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen a.