

Mathematik für Informatik 1: Analysis

Abgabetermin: Freitag, 01.12.2023, 10:00

Aufgabe 25: Welche der folgenden Folgen $(a_n)_{n \geq 1}$ sind monoton, beschränkt, konvergent oder bestimmt divergent? Es ist keine Begründung erforderlich, es darf aber eine Begründung gegeben werden.

- (a) $a_n = 5$ (g) $a_n = -n$
(b) $a_n = \frac{1}{(-1)^n}$ (h) $a_n = n^2 - n$
(c) $a_n = \frac{(-1)^n}{n^2}$ (i) $a_n = 2^n$
(d) $a_n = \frac{3}{n}$ (j) $a_n = (-2)^n$
(e) $a_n = \frac{n}{n+1}$ (k) $a_1 = 1$ und $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{n}$ für $n \geq 1$.
(f) $a_n = \frac{n+1}{n}$ (l) $a_1 = 1$ und $a_{n+1} = \frac{n}{n+1} \cdot a_n$ für $n \geq 1$.

Aufgabe 26: Die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sei rekursiv definiert durch $a_0 = 1$ und

$$a_{n+1} = \sqrt{1 + a_n}$$

- (a) Zeige, die Folge ist monoton wachsend.
(b) Zeige, die Folge ist konvergent, und bestimme den Grenzwert.

Aufgabe 27:

- (a) Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen, so dass $|a_{n+1} - a_n| < \frac{1}{2^n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
Zeige, daß die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge und mithin konvergent ist.
(b) Bleibt die Behauptung aus Aufgabenteil (a) korrekt, wenn wir die Bedingung $|a_{n+1} - a_n| < \frac{1}{n}$ voraussetzen? Gib einen Beweis oder ein Gegenbeispiel an.

Aufgabe 28:

- (a) Bei Algorithmen wendet man oft das Verfahren *divide and conquer* an. Im einfachsten Fall *teilt* man dabei ein Problem mit Kenngröße $n \geq 1$ in zwei gleich große Teilprobleme der Größe $n - 1$ auf. Diese löst man dann rekursiv durch weiteres Aufteilen und setzt die Teillösungen anschließend zusammen. Nehmen wir an, daß für die Lösung des Problems für $n = 1$ eine Zeiteinheit benötigt wird und daß für das Zerlegen des Problems der Größe n in zwei Teilprobleme der Größe $n - 1$ sowie für das Zusammensetzen der Lösungen der zwei Teilprobleme zur Lösung des Problems der Größe n jeweils wieder eine Zeiteinheit benötigt wird. Zudem beschreibe a_n den Aufwand in Zeiteinheiten, zur Lösung des Problems der Größe n .

- (1) Leite eine Rekursionsvorschrift für die Folge a_n her, d.h. beschreibe a_{n+1} in Abhängigkeit von a_n .
- (2) Bestimme eine explizite Formel für a_n .
- (3) Zeige, $a_n \in \mathcal{O}(2^n)$.
- (b) Ordne die folgenden Folgen dergestalt, daß für zwei aufeinander folgende Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ stets $a_n \in o(b_n)$ gilt und begründe die Korrektheit der Anordnung:

$$(7n^3)_{n \in \mathbb{N}}, \quad (\sqrt{n})_{n \in \mathbb{N}}, \quad (5^n)_{n \in \mathbb{N}}, \quad (10^{4^{10}})_{n \in \mathbb{N}}, \quad \left(\left(\frac{1}{10} \right)^{n^2} \right)_{n \in \mathbb{N}}, \quad (10n + 3)_{n \in \mathbb{N}}.$$