Fachbereich Mathematik
Thomas Markwig

Wintersemester 2023, Blatt 8
Matilde Manzaroli

Mathematik für Informatik 1: Analysis

Abgabetermin: Freitag, 08.12.2023, 10:00

Aufgabe 29:

(a) Zeige, daß die geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ mit $q = \frac{2}{3}$ eine konvergente Majorante der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ ist und leite daraus eine obere Schranke für den Grenzwert der Reihe ab.

(b) Zeige, die Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ mit $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ ist monton wachsend und konvergent.

Hinweis zu Teil b., man kann die Bernoulli-Ungleichung an geeigneter Stelle verwenden.

Aufgabe 30: Bestimme für **vier** der folgenden Reihen, ob sie konvergent, absolut konvergent oder divergent sind:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \cdot \left(1-\frac{1}{n}\right)^n$.

(b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{3\cdot n!}$.

(c) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}$.

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+2}{n}\right)^n$.

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+\sqrt{n}}$.

(f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$.

Aufgabe 31: Es sei $q \in \mathbb{K}$ mit $|q| < 1$ und es sei $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \cdot t^n$ eine Potenzreihe über $\mathbb{K}$ mit Konvergenzradius r. Bearbeite **drei** der folgenden Teilaufgaben:

(a) Berechne das Cauchy-Produkt $\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n\right)^2$.

(b) Berechne den Wert der Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} nq^n$ mit Hilfe von Teil (a).

(c) Zeige, konvergiert $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \cdot y^n$ und ist $|x| < |y|$, dann konvergiert $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n \cdot x^{n-1}$.

(d) Zeige, daß die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n \cdot t^{n-1}$ den Konvergenzradius r hat.

Aufgabe 32:

(a) Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei Folgen in $\mathbb{C}$, so daß die Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n^2$ absolut konvergent sind. Zeige, dann ist auch die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot b_n$ absolut konvergent.

(b) Gib ein Beispiel für eine absolut konvergente Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ mit $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$. (Wie immer mit Begründung!)

Präsenzaufgabe 1: Bestimme den Konvergenzradius der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} t^n$ über $\mathbb{R}$ und untersuche die Reihe auf Konvergenz in den Randpunkten des Konvergenzintervalls.

Präsenzaufgabe 2: Bestimme die 5-adische Darstellung der rationalen Zahl $\frac{111336}{1000}$ mittels des Algorithmus' aus der Vorlesung.