

Mathematik für Informatik 1: Analysis

Abgabetermin: Freitag, 15.12.2023, 10:00

Aufgabe 33:

(a) Bestimme für **drei** der folgenden Potenzreihen über \mathbb{R} den Konvergenzradius r und untersuche das Konvergenzverhalten in den Randpunkten des Konvergenzintervalls $(-r, r)$:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 4^n} \cdot t^n.$

(4) $\sum_{n=0}^{\infty} n! \cdot t^n.$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} \cdot t^{n+1}.$

(5) $\sum_{n=1}^{\infty} \binom{n+1}{n} \cdot t^n.$

(3) $\sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n} \cdot t^n.$

(6) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot t^n.$

(b) Zeige, wenn $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot t^n$ den Konvergenzradius r hat und $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist, dann hat $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{c^n} \cdot t^n$ den Konvergenzradius $|c| \cdot r$.

Aufgabe 34: [Binomialreihe]

Für eine beliebige reelle Zahl $a \in \mathbb{R}$ und eine natürliche Zahl $k \in \mathbb{N}$ definieren wir den *Binomialkoeffizienten*

$$\binom{a}{k} = \frac{a \cdot (a-1) \cdot \dots \cdot (a-k+1)}{k!} \in \mathbb{R}.$$

(a) Zeige, für $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ hat die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{a}{n} \cdot t^n$ den Konvergenzradius 1.

(b) Berechne die Binomialkoeffizienten $\binom{a}{k}$ für den Fall $a = 3$ für alle k und berechne damit auch die Potenzreihe in (a) exakt. Welchen Konvergenzradius hat die Binomialreihe für $a \in \mathbb{N}$?

Aufgabe 35:

(a) Zeige für alle $x, y \in \mathbb{R}$ die Gleichung

$$\cos(x) - \cos(y) = -2 \cdot \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{x-y}{2}\right).$$

(b) Zeige, für $x \in \mathbb{R}$ mit $e^{ix} \neq 1$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{k=1}^n \cos(k \cdot x) = \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2} \cdot x\right)}{2 \cdot \sin\left(\frac{x}{2}\right)} - \frac{1}{2}.$$

Aufgabe 36: Bearbeite **drei** der folgenden Teilaufgaben:

- (a) Berechne die 7-adische Darstellung der Zahl 4973.
- (b) Berechne das Produkt der Zahlen $(2,33\text{ E}2)_5$ und $(1,01\text{ E}1)_5$ im Dezimalsystem.
- (c) Berechne die 3-adische Zahldarstellung der rationalen Zahl $\frac{123}{75}$.
- (d) Berechne die Dezimalzahldarstellung des 3-adischen Bruches $(2,12121\text{ E}2)_3$.
- (e) Berechne die b-adische Zahldarstellung von $\frac{1}{7}$ für $b = 2, 7, 10, 16$.

Präsenzaufgabe 1: Bestimme die Häufungspunkte der folgenden Mengen:

- (a) $A = \left\{ (-1)^n + \frac{n+1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$.
- (b) $B = \{x \in \mathbb{R} \mid 3 < |x + 1|\}$.

Präsenzaufgabe 2: Bestimme den folgenden Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x^2 - x - 2}.$$