Fachbereich Mathematik — Wintersemester 2023, Blatt 10
Thomas Markwig — Matilde Manzaroli

Mathematik für Informatik 1: Analysis

Abgabetermin: Freitag, 22.12.2023, 10:00

Aufgabe 37:

(a) Bestimme für **zwei** der folgenden Mengen jeweils die Menge aller ihrer Häufungspunkte:

(1) $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\}$.

(2) $B = \mathbb{N}$.

(3) $C = \left\{ (-1)^n + \left(\frac{-1}{n}\right)^n \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\}$.

(b) Gib ein Beispiel für eine Menge, die genau drei Häufungspunkte hat.

(c) Bestimme **zwei** der folgenden Grenzwerte oder zeige, daß sie nicht existieren:

(1) $\lim\limits_{x \to 3} \frac{x^3 - 9x}{x - 3}$.

(2) $\lim\limits_{x \to 5} \frac{2x^4 + x^3 - 3x^2 + 4}{x^2 - 5}$.

(3) $\lim\limits_{x \to \infty} \sqrt{\frac{2x^3 + 5x}{(x+1)^3}}$.

(4) $\lim\limits_{x \to \infty} \sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x}$.

Aufgabe 38:

(a) Entscheide, ob die folgende Funktion in $a = -2$ stetig ist

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} \frac{4x^2 + x + 1}{1 - x}, & \text{falls } x < -2, \\ |x - 1|, & \text{falls } x \geq -2. \end{cases}$$

(b) Bestimme eine reelle Zahl b, so daß die folgende Funktion stetig ist:

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} x^2 - b, & \text{falls } x < 0, \\ \sqrt{x} + b, & \text{falls } x \geq 0. \end{cases}$$

Aufgabe* 39: Es sei $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion und $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge in $\mathbb{R}$, so daß die Folge $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert.

(a) Zeige durch ein Beispiel, daß die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nicht konvergieren muß.

(b) Zeige, wenn f stetig und streng monoton ist, dann ist $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergent.

Aufgabe* 40: Zeige, ist $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f(0) = f(1)$. Zeige, dann gibt es ein $a \in [0, \frac{1}{2}]$ mit $f(a) = f(a + \frac{1}{2})$.

Hinweis, betrachte die Hilfsfunktion $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto f(x) - f(x + \frac{1}{2})$.

Präsenzaufgabe 1: Löse die folgenden Gleichungen für $x \in \mathbb{R}$:

(a) $\log_2(x) - \log_2(x-6) = 3$.

(b) $4^x + 4 = 2^{x+2} + 2^x$.