Fachbereich Mathematik — Wintersemester 2023, Blatt 12
Thomas Markwig — Matilde Manzaroli

Mathematik für Informatik 1: Analysis

Abgabetermin: Freitag, 19.01.2024, 10:00

Aufgabe 45: Zeige das folgende Additionstheorem des Tangens' für $x, y, x + y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$:

$$\tan(x + y) = \frac{\tan(x) + \tan(y)}{1 - \tan(x) \cdot \tan(y)}.$$

Aufgabe* 46: Löse **eine** der folgenden Teilaufgaben:

(a) Zeige, $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$.

(b) Zeige, ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge mit $0 \neq a_n \in \mathbb{R}_{>0}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so gilt

$$\lim_{n\to\infty} (1 + a_n)^{\frac{1}{a_n}} = e.$$

(c) Für $x \in \mathbb{R}_{>0}$ zeige $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$.

Hinweise: a. wenn s_n die n-te Partialsumme der Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$ bezeichnet und $t_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, dann zeige man $t_n \leq s_n$ und $\lim_{n\to\infty} t_n \geq s_m$ für alle m. Man beachte, daß die Konvergenz der beiden Folgen $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(t_n)_{n\geq 1}$ bereits bekannt ist, siehe Aufgabe 29. Für b. schachtele man die Folge in Teilfolgen von $(t_n)_{n\geq 1}$ ein.

Aufgabe 47: Entscheide, an welchen Stellen die folgenden Funktionen differenzierbar sind, und beweise die Aussage:

(a) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x \cdot |x|$.

(b) $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} 2x^2, & \text{für } x \leq 1, \\ x + 1, & \text{für } x > 1. \end{cases}$

Aufgabe 48: Bearbeite **eine** der beiden Teilaufgaben:

(a) Zeige mittels der Definition der Ableitung als Grenzwert des Differenzenquotienten, daß die Wurzelfunktion $f : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \sqrt{x}$ differenzierbar ist mit

$$f' : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}}.$$

(b) Bestimme die Ableitung für **eine** der Funktionen mit den folgenden Funktionsvorschriften mit Hilfe der Ableitungsregeln an den Stellen, an denen sie differenzierbar sind:

(1) $f(x) = \frac{x^3 - 2x + 1}{x^2 + 4}$.

(2) $g(x) = (x^4 + 2x^3 + 1) \cdot \sqrt{x^4 + 1}$.

Präsenzaufgabe 1: Bestimme die Ableitungen der Funktionen mit den folgenden Funktionsvorschriften mit Hilfe der Ableitungsregeln an den Stellen, an denen sie differenzierbar sind:

(a) $f(x) = \frac{e^x}{x-2}$.

(b) $g(x) = 4x^3 + 9 - \sin(x) + \tan(x) - 5 \cdot \ln(x)$.

(c) $h(x) = e^{x^4-3x+1}$.

(d) $k(x) = \sin\left(x^5 + \frac{1}{x}\right)$.