Fachbereich Mathematik
Thomas Markwig

Wintersemester 2023, Blatt 13

Matilde Manzaroli

Mathematik für Informatik 1: Analysis

Abgabetermin: Freitag, 26.01.2024, 10:00

Aufgabe 49: [Logarithmische Ableitung]

Für eine auf U differenzierbare Funktion $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ ohne Nullstellen nennen wir $L(f) := \frac{f'}{f}$ die logarithmische Ableitung von f.

Zeige **eine** der folgenden Rechenregeln für die logarithmische Ableitung:

(a) $L(f_1 \cdot \ldots \cdot f_n) = L(f_1) + \ldots + L(f_n)$.

(b) $L\left(\frac{f}{g}\right) = L(f) - L(g)$.

(c) $L\big(\exp(f(x))\big) = f'(x)$.

Aufgabe 50:

(a) Bestimme für **zwei** der folgenden Funktionen $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ ein maximales Intervall I, auf dem sie differenzierbar sind, und berechne ihre Ableitungen:

(1) $f(x) = x^{\sqrt{x}}$.

(2) $f(x) = \log_3(e^{2x+1})$.

(3) $f(x) = x \cdot \ln(x) - x$.

(4) $f(x) = (\cos(x))^{\sin(x)}$.

(5) $f(x) = e^{3x} \cdot \big(\tan(x) - \sin(3x^2) + 3\big) \cdot x$.

(6) $f(x) = e^{e^x}$.

(b)* Zeige, daß die folgende Funktion in $a = 0$ differenzierbar, daß ihre Ableitung in $a = 0$ aber nicht stetig ist:

$$f : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} x^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right), & \text{wenn } x \neq 0, \\ 0, & \text{wenn } x = 0. \end{cases}$$

Aufgabe 51: Löse **zwei** der folgenden drei Teilaufgaben:

(a) Zeige, daß die Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto 2e^x + e^{2x} - 1$ streng monoton wachsend ist, bestimme das Bild von f sowie die Umkehrfunktion und deren Ableitung.

(b) Bestimme alle Extremstellen von $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^3 - x^2 - 8x + 1$.

(c) Zeige, daß die Funktion

$$f_a : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^3 - 3a^2x + 7$$

für keinen Parameterwert $a \in \mathbb{R}_{>0}$ drei nicht-negative Nullstellen hat.

Aufgabe 52: Löse **eine** der folgenden beiden Teilaufgaben:

(a) Bestimme eine monoton steigende, differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{für } x < -1, \\ 4, & \text{für } x > 1. \end{cases}$$

(b) Bestimme für die Funktion $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{x}$ mit $0 < a < b$ einen Wert $c \in (a, b)$ mit

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Präsenzaufgabe 1: Berechne die folgenden Grenzwerte mittels der Regeln von de l'Hôpital:

(a) $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos(x)}{x}$.

(b) $\lim_{x \to -1} \frac{x^2 - 1}{x^3 + 2x + 3}$.

(c) $\lim_{x \to \infty} \frac{x^2 + \ln(x)}{x^2 - \ln(x)}$.