Fachbereich Mathematik
Thomas Markwig

Wintersemester 2023, Blatt 14

Matilde Manzaroli

Mathematik für Informatik 1: Analysis

Abgabetermin: Freitag, 02.02.2024, 10:00

Aufgabe 53: Löse **eine** der folgenden Teilaufgaben:

(a) Es sei $a \in \mathbb{R}$ mit $a > 1$ und

$$f : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x \cdot \log_a(x).$$

Untersuche, auf welchen Teilintervallen des Definitionsbereichs die Funktion streng monton wächst bzw. fällt, und untersuche das Grenzverhalten für $x \to 0$.

(b) Gegeben seien reelle Zahlen $0 \leq a_1 < a_2 < \ldots < a_n$ sowie die Funktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \sum_{i=1}^{n} (x - a_i)^2.$$

Bestimme den minimalen Wert von f und die Stelle $x \in \mathbb{R}$, an der dieser Wert angenommen wird.

Aufgabe 54:

(a) Berechne **einen** der folgenden Grenzwerte mittels der Regeln von de l'Hôpital:

(1) $\lim_{x\to 0} \frac{20\cdot x^{1300}}{\tan(x^{1300})}$.

(2) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - x - 1}{1 - \cos(x)}$.

(3) $\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x}$ mit $1 \neq a \in \mathbb{R}_{>0}$.

(b) Berechne das dritte Taylorpolynom der folgenden Funktionen $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ im angegebenen Entwicklungspunkt a:

(1) $f(x) = \sin(x)$, $a = \frac{\pi}{2}$.

(2) $f(x) = e^{4x^2+x}$, $a = 0$.

Hinweis: Mit etwas Überlegung braucht man in Teil (2) keine Ableitung zu berechnen!

Aufgabe* 55: Sei $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto e^x$, $n \in \mathbb{N}$, $Z_n = (0, \frac{1}{2^n}, \frac{2}{2^n}, \ldots, \frac{2^n-1}{2^n}, 1)$ eine Zerlegung und $\alpha^n = (\frac{1}{2^n}, \frac{2}{2^n}, \ldots, \frac{2^n-1}{2^n}, 1)$ Zwischenpunkte. Zeige die folgenden Aussagen.

(1) $ZS(f, Z_n, \alpha^n) = (e-1) \cdot e^y \cdot \frac{1}{\frac{e^y - 1}{y}}$ für $y = \frac{1}{2^n}$.

(2) $\lim\limits_{y\to 0} \frac{e^y - 1}{y} = 1$.

(3) Berechne $\int_0^1 e^x dx$ mit Hilfe der Zwischensumme aus Aufgabenteil (1).

Aufgabe* 56: Ist $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig, so gibt es ein $c \in (0,1)$ mit $\int_0^1 f(x) \cdot x^2\, dx = \frac{f(c)}{3}$.

Präsenzaufgabe 1: Berechne die folgenden bestimmten und unbestimmten Integrale:

(a) $\int_{-\frac{1}{4}}^{0} \sqrt{8x+2}\, dx.$

(b) $\int_{1}^{2} \frac{x^4+2x}{x^5+5x^2-2}\, dx.$

(c) $\int x^2 - \sin(x) + e^{3x}\, dx.$

(d) $\int \sin(x) \cdot e^{x}\, dx.$

(e) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cdot \cos(x)\, dx.$

(f) $\int_{2}^{5} \frac{3x}{x^2+1}\, dx.$

(g) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\sqrt{\sin(x)}\right) \cdot \cos(x)\, dx.$

(h) $\int e^{\sqrt{x}}\, dx.$