Fachbereich Mathematik
Thomas Markwig

Wintersemester 2023, Blatt zur Forumsdiskussion

Matilde Manzaroli

Mathematik für Informatik 1: Analysis

Die Aufgaben brauchen nicht mehr eingereicht zu werden und werden auch nicht mehr korrigiert. Sie dienen allein der Vorbereitung auf die Klausur und können im Forum diskutiert werden.

Aufgabe 1: Ordne die folgenden Folgen dergestalt, daß für zwei aufeinander folgende Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ stets $a_n \in o(b_n)$ gilt und begründe die Korrektheit der Anordnung:

$$\big(\log(n)\big)_{n\in\mathbb{N}}, \quad \big(\sqrt{n^3}\big)_{n\in\mathbb{N}}, \quad (n^2+n+7)_{n\in\mathbb{N}}, \quad \left(\left(\frac{1}{10}\right)^{n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}}, \quad (n^n)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Aufgabe 2: Untersuche die fogenden Folgen $(a_n)_{n\geq 1}$, ob sie konvergent oder divergent sind und bestimme ggf. ihren Grenzwert:

(a) $a_n = \frac{n^2+(-1)^n}{n^2+1}$

(b) $a_n = \frac{5^n+2^{n+1}}{3^n+2^{n-1}}$

(c) $a_n = (-1)^n \cdot \frac{1+\sin(n)}{2+n}$

(d) $a_n = \frac{1+\sqrt{n-1}}{n+1}$

Aufgabe 3: Beweise die folgende Gleichung für alle $n \geq 1$ durch vollständige Induktion:

$$\sum_{k=1}^{n}(3k-2) = \frac{n\cdot(3n-1)}{2}.$$

Aufgabe 4: Überprüfe die folgende Abbildung auf Injektivität und Surjektivität:

$$f : \mathbb{N}\times\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z} : (n,m) \mapsto n-m.$$

Aufgabe 5: Bestimme die Häufungspunkte der Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ mit

$$a_n = \cos(n\cdot\pi)+3.$$

Aufgabe 6: Überprüfe die folgenden Reihen auf Konvergenz:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n)}{n^2+3}$.

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^{2n+1}}{n!}$.

Aufgabe 7: Bestimme für die folgende Potenzreihe den Konvergenzradius:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+1}{3^{2n+1}} \cdot t^n.$$

Aufgabe 8: Überprüfe, ob die folgenden Funktion stetig oder differenzierbar ist:

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} x+3, & \text{wenn } x < 0, \\ -3 \cdot \cos(\pi - x), & \text{wenn } x \geq 0. \end{cases}$$

Aufgabe 9: Berechne die Ableitungen der folgenden Funktionen:

(a) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto 10 + x \cdot \cos(x) + (x^2 - 5x + 1)^3$.

(b) $g : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \tan(x) \cdot \cos(x^2)$.

Aufgabe 10: Berechne die Ableitung der folgenden Funktion an der Stelle $x = \pi$:

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \log_3 \left(e^{(x^2+1)\cdot\cos(x)} \right).$$

Aufgabe 11: Berechne den folgenden Grenzwert:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^3 + x}{2x^3 - 5} \cdot \left(\frac{\cos(x)}{x} + 1 \right).$$

Aufgabe 12: Berechne das folgende Integral:

$$\int_e^{3e} \frac{1}{x \cdot \ln(x)} \, dx.$$

Aufgabe 13: Berechne das folgende uneigentliche Integral:

$$\int_{-\infty}^{0} e^x \, dx.$$

Aufgabe 14: Sei $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig und $a, b \in \mathbb{R}$ mit $f(a) \neq b$. Zeige, es gibt ein $\delta > 0$, so dass $f(x) \neq b$ für alle $x \in (a - \delta, a + \delta)$.

Aufgabe 15: Sei $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$ und $f(1) = a > 0$. Zeige, dann ist $f = \exp_a$.

Aufgabe 16: Seien M, N Mengen, $A_1, A_2 \subseteq M$ und $B, B_1, B_2 \subseteq N$ Teilmengen und $f : M \longrightarrow N$ eine Abbildung. Beweise die folgender Aussage:

$$f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2)$$

Gib außerdem ein konkretes Beispiel an, in dem keine Gleichheit gilt.

Aufgabe 17:

(a) Beweise:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e^{n+\pi} - \pi}{e^n + \pi} = e^\pi.$$

(b) Berechne:

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^4 - x^3 + x^2}{x^2 - 2}.$$

Aufgabe 18: Beweise die folgende Gleichung:

$$\sin(2x) - \cos(2x) = \frac{(\tan(x) + 1)^2 - 2}{1 + \tan^2(x)}.$$

Aufgabe 19: Zeige, daß die geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ mit $q = \frac{3}{4}$ eine konvergente Majorante der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)!}$ ist und leite daraus eine obere Schranke für den Grenzwert der Reihe ab.

Aufgabe 20: Berechne das folgende Integral:

$$\int_3^4 \frac{x - 1}{x^2 - 4} dx.$$