Universität Tübingen, FB Mathematik | Wintersemester 2023/24
Thomas Markwig | Matilde Manzaroli

Probeklausur zur Vorlesung Mathematik 1 für Informatiker

Name | *Matrikelnummer* | *Summe der Punkte*

Klausurtermin: xxx

Hinweise: Die Klausuraufgaben sind jeweils auf getrennten Blättern zu bearbeiten. *Nie zwei Aufgaben auf dem gleichen Blatt lösen!!!*
Alle nicht offensichtlichen Beweis-/Rechenschritte sind zu begründen.
Die Zahlen in Klammern am rechten Seitenrand geben die Punktzahlen an, die durch Lösen der jeweiligen Aufgabe erreichbar sind. Insgesamt sind es 60 Punkte.
Jedes Blatt ist am oberen Rand der Vorderseite wie folgt zu beschriften:
eigener Name | *Matrikelnummer* | *Aufgabennummer*

Aufgabe 1: Zeige, für alle $n \geq 1$ ist $3^n - 3$ durch 6 teilbar. (4)

Aufgabe 2: Berechne die folgenden bestimmten und unbestimmten Integrale:

a. $\int \sin(x) \cdot e^x \, dx.$ (4)

b. $\int_0^{\frac{\sqrt{\pi}}{2}} x \cdot \sin(x^2) \, dx.$ (4)

Aufgabe 3: Die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sei rekursiv definiert durch $a_0 = \frac{3}{2}$ und $a_{n+1} = (a_n - 1)^2 + 1$ für $n \in \mathbb{N}$.

a. Zeige, daß $a_n \geq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. (2)

b. Zeige mit Induktion nach n, daß die Folge monoton fallend ist. (3)

c. Zeige, daß die Folge konvergent ist und bestimme den Grenzwert. (4)

Aufgabe 4:

a. Überprüfe, ob die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}$ konvergent ist. (4)

b. Bestimme den Konvergenzradius r der Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 4^n} \cdot t^n$ über $\mathbb{R}$ und untersuche das Konvergenzverhalten in den Randpunkten des Intervalls $(-r, r)$. (4)

Aufgabe 5: Bestimme die folgenden Grenzwerte:

a. $\lim\limits_{x \to 5} \frac{2x^4 + x^3 - 3x^2 + 4}{x^2 - 5}$. (4)

b. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - x - 1}{1 - \cos(x)}$. (4)

Aufgabe 6: Bestimme die lokalen Minima und Maxima der Funktion (5)

$$f : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x \cdot \ln(x).$$

Aufgabe 7: Es sei $a \in \mathbb{R}$ mit $a > 1$ und

$$f : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x \cdot \log_a(x).$$

(6)

Untersuche, auf welchen Teilintervallen des Definitionsbereichs die Funktion streng monton wächst bzw. fällt, und untersuche das Grenzverhalten für $x \to 0$.

Aufgabe 8: Zeige das folgende Additionstheorem des Tangens' für $x, y, x + y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$: (4)

$$\tan(x + y) = \frac{\tan(x) + \tan(y)}{1 - \tan(x) \cdot \tan(y)}.$$

Aufgabe 9: Betrachte die Funktionenfolge $(f_n)_{n \geq 1}$ mit

$$f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{1 + |x|^n}.$$

a. Zeige, daß die Funktionenfolge punktweise konvergiert und bestimme die Grenzfunktion f. (2)

b. Überprüfe, ob die Funktionenfolge auch gleichmäßig gegen f konvergiert. (2)

Aufgabe 10: Zeige, ist $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f(0) = f(1)$. Zeige, dann gibt es ein $a \in [0, \frac{1}{2}]$ mit $f(a) = f(a + \frac{1}{2})$. (4)

Hinweis, betrachte die Hilfsfunktion $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto f(x) - f(x + \frac{1}{2})$.