Fachbereich Mathematik
Thomas Markwig Sommersemester 2024, Blatt 2
Paul Weiß

Mathematik für Informatik 2: Lineare Algebra

Abgabetermin: Freitag, 26.04.2024, 10:00

In Aufgabe 2 und 3 betrachten wir $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ mit der komponentenweisen Addition. Aus Präsenzaufgabe 1 wissen wir, dass $(\mathbb{R}^2, +)$ eine Gruppe ist.

Aufgabe 1: Bearbeite **eine** der beiden Teilaufgaben.

(a) Untersuche, ob $G = \{2 + 3z \mid z \in \mathbb{Z}\}$ mit der Multiplikation ganzer Zahlen eine Gruppe ist.

(b) Für welche $a, b \in \mathbb{R}$ wird $\mathbb{R}$ mit der folgenden zweistelligen Operation eine Gruppe:

$$x * y = ax + ay + b \quad \text{für } x, y \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 2: Untersuche für die folgenden Mengen U und V, ob sie Untergruppen von $(\mathbb{R}^2, +)$ sind.

(a) $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 3x = 4y\}$.

(b) $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$.

Aufgabe 3: Bearbeite **zwei** der drei Teilaufgaben. Welche der folgenden Abbildungen ist ein Gruppenhomomorphismus / -isomorphismus?

(a) $\alpha : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 : (x, y) \mapsto (x - y, y - x)$.

(b) $\beta : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 : (x, y) \mapsto (x + x \cdot y, 2x)$.

(c) $\gamma : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 : (x, y) \mapsto (x - 3y, 2x)$.

Welche der Aussagen bleiben richtig, wenn wir $\mathbb{R}^2$ durch $\mathbb{Z}^2$ ersetzen?

Präsenzaufgabe 5: Ein Schema der Form

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ wollen wir eine *reelle* $2x2$-*Matrix* nennen, und $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$ soll die Menge solcher Matrizen sein. Für zwei reelle $2x2$-Matrizen definieren wir ihr Produkt als

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' + bc' & ab' + bd' \\ ca' + dc' & cb' + dd' \end{pmatrix}.$$

Ferner bezeichnen wir

$$\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc \in \mathbb{R}$$

als *Determinante* der Matrix, und definieren

$$\mathrm{Gl}_2(\mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R}) \mid \det(A) \neq 0\}.$$

Zeige:

(a) Für $A, B \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$ gilt $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$.

(b) $\big(\mathrm{Gl}_2(\mathbb{R}), \cdot\big)$ ist eine nicht-abelsche Gruppe.

(c) Die folgende Menge U ist eine Untergruppe von $\big(\mathrm{Gl}_2(\mathbb{R}), \cdot\big)$:

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{R}, (a, b) \neq (0, 0) \right\}$$

(d) $\det : (\mathrm{Gl}_2(\mathbb{R}), \cdot) \longrightarrow (\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ ist ein Gruppenhomomorphismus.