

Mathematik für Informatik 2: Lineare Algebra

Abgabetermin: Freitag, 03.05.2024, 10:00

Aufgabe 4: Bearbeite **eine** der beiden Teilaufgaben.

(a) Es sei U die Gruppe aus Präsenzaufgabe 5 (c) und

$$g = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in U.$$

Zeige, die Abbildung $\alpha : (\mathbb{Z}, +) \mapsto (U, \circ) : n \mapsto g^n$ ist ein Gruppenhomomorphismus. Bestimme zudem den Kern und das Bild von α .

(b) Zeige, dass die Abbildung

$$\alpha : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto 2x + 3y$$

ein Gruppenhomomorphismus ist. Bestimme zudem den Kern und das Bild von α . Ist α injektiv oder surjektiv?

Aufgabe 5: Bearbeite **eine** der beiden Teilaufgaben (a) und (b).

(a) Betrachte die Permutationen

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 5 & 4 & 3 & 1 & 7 & 8 & 6 \end{pmatrix}, \pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 8 & 3 & 1 & 7 & 5 & 2 & 6 \end{pmatrix} \in S_8.$$

(1) Berechne $\sigma \circ \pi$, $\pi \circ \sigma$, σ^{-1} , π^{-1} .

(2) Bestimme für jede der Permutationen in a. die Zyklenzerlegung.

(3) Schreibe $\sigma \circ \pi$ als ein Produkt von Transpositionen.

(4) Schreibe π^{-1} als ein Produkt von Transpositionen aufeinander folgender Zahlen.

(5) Berechne für jede der Permutationen in a. das Signum.

(b) Liste für die beiden Gruppen $(\mathbb{Z}_{15}, +)$ und $(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5, +)$ jeweils alle 15 Elemente in einer Tabelle und berechne deren Ordnung.

Aufgabe 6: Bearbeite **eine** der beiden Teilaufgaben.

(a) Zeige, daß jede Gruppe von Primzahlordnung zyklisch ist.

(b) Es sei (G, \cdot) ein Gruppe mit neutralem Element e .
Zeige, falls $g^2 = e$ für alle $g \in G$, so ist G abelsch.

Präsenzaufgabe 6:

- (a) Finde zwei Untergruppen von S_4 , die beide die Mächtigkeit 4 besitzen, aber nicht isomorph zueinander sind. Begründe, weshalb es Untergruppen sind und weshalb sie nicht isomorph zueinander sind.
- (b) Bestimme die Elemente der Untergruppe $D_{10} = \langle (1\ 2\ 3\ 4\ 5), (1\ 4) \circ (2\ 3) \rangle$ von S_5 .