Fachbereich Mathematik — Sommersemester 2024, Blatt 4
Thomas Markwig — Paul Weiß

Mathematik für Informatik 2: Lineare Algebra

Abgabetermin: Freitag, 10.05.2024, 10:00

Aufgabe 7: Bearbeite **zwei** der folgenden drei Teilaufgaben.

(a) Bestimme die Einheitengruppe von $\mathbb{Z}_{18}$.

(b) Finde alle Nullteiler in $\mathbb{Z}_{18}$, d.h. alle Elemente $\overline{a} \in \mathbb{Z}_{18}$, für die es ein $\overline{0} \neq \overline{b} \in \mathbb{Z}_{18}$ gibt mit $\overline{a} \cdot \overline{b} = \overline{0}$. Gib zu jedem Nullteiler $\overline{a}$ auch ein passendes $\overline{b}$ an.

(c) Berechne mit Hilfe einer Rechnung in $\mathbb{Z}_7$, welcher Wochentag 177 Tage nach dem 1. Mai diesen Jahres ist.

Aufgabe 8: Für $\omega \in \mathbb{Z}_{>0}$ sei $\sqrt{-\omega} = i \cdot \sqrt{\omega} \in \mathbb{C}$ und

$$\mathbb{Z}[\sqrt{-\omega}] = \left\{ a + b \cdot \sqrt{-\omega} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{Z} \right\}.$$

(a) Zeige, $\mathbb{Z}[\sqrt{-\omega}]$ ist ein Unterring von $\mathbb{C}$.

(b) Bestimme die Einheitengruppe $\mathbb{Z}[\sqrt{-\omega}]^*$.

Hinweis: in Teil (b) kann man die Multiplikativität des Absolutbetrags $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$ in $\mathbb{C}$ verwenden.

Aufgabe 9: Bearbeite **zwei** der folgenden drei Teilaufgaben.

(a) Zeige, ist K ein Körper, dann gilt $K[t]^* = K \setminus \{0\}$.

(b) Zeige, $f = \overline{2} \cdot t - \overline{1} \in \mathbb{Z}_4[[t]]$ ist eine Einheit und bestimme die Inverse von f.

(c) Bestimme alle Nullstellen des Polynoms

$$f = t^4 - t^3 + t^2 - t \in K[t]$$

für die Fälle $K = \mathbb{C}$, $K = \mathbb{R}$, $K = \mathbb{Z}_2$, $K = \mathbb{Z}_7$. Was sind jeweils die irreduziblen Faktoren des Polynoms?

Präsenzaufgabe 7:

(a) Bestimme alle Untergruppen der Gruppe $\mathbb{D}_{10}$ aus Präsenzaufgabe 6.

(b) Zeige, eine kommutativer Ring mit Eins ist genau dann ein Körper, wenn er nur zwei Ideale besitzt.

(c) Sei M ein Menge und für $A, B \subseteq M$ definieren wir die symmetrische Differenz als

$$A \triangle B := (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

Zeige, die Potenzmenge $\mathcal{P}(M) = \{A \mid A \subseteq M\}$ ist mit $\triangle$ als Addition und $\cap$ als Multiplikation ein kommutativer Ring mit Eins. Ist der Ring ein Körper?