

## Mathematik für Informatik 2: Lineare Algebra

Abgabetermin: Freitag, 10.05.2024, 10:00

**Aufgabe 7:** Bearbeite **zwei** der folgenden drei Teilaufgaben.

- (a) Bestimme die Einheitengruppe von  $\mathbb{Z}_{18}$ .
- (b) Finde alle Nullteiler in  $\mathbb{Z}_{18}$ , d.h. alle Elemente  $\bar{a} \in \mathbb{Z}_{18}$ , für die es ein  $\bar{0} \neq \bar{b} \in \mathbb{Z}_{18}$  gibt mit  $\bar{a} \cdot \bar{b} = \bar{0}$ . Gib zu jedem Nullteiler  $\bar{a}$  auch ein passendes  $\bar{b}$  an.
- (c) Berechne mit Hilfe einer Rechnung in  $\mathbb{Z}_7$ , welcher Wochentag 177 Tage nach dem 1. Mai diesen Jahres ist.

**Aufgabe 8:** Für  $\omega \in \mathbb{Z}_{>0}$  sei  $\sqrt{-\omega} = i \cdot \sqrt{\omega} \in \mathbb{C}$  und

$$\mathbb{Z}[\sqrt{-\omega}] = \{a + b \cdot \sqrt{-\omega} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}.$$

- (a) Zeige,  $\mathbb{Z}[\sqrt{-\omega}]$  ist ein Unterring von  $\mathbb{C}$ .
- (b) Bestimme die Einheitengruppe  $\mathbb{Z}[\omega]^*$ .

Hinweis: in Teil (b) kann man die Multiplikativität des Absolutbetrags  $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$  in  $\mathbb{C}$  verwenden.

**Aufgabe 9:** Bearbeite **zwei** der folgenden drei Teilaufgaben.

- (a) Zeige, ist  $K$  ein Körper, dann gilt  $K[t]^* = K \setminus \{0\}$ .
- (b) Zeige,  $f = \bar{2} \cdot t - 1 \in \mathbb{Z}_4[[t]]$  ist eine Einheit und bestimme die Inverse von  $f$ .
- (c) Bestimme alle Nullstellen des Polynoms

$$f = t^4 - t^3 + t^2 - t \in K[t]$$

für die Fälle  $K = \mathbb{C}$ ,  $K = \mathbb{R}$ ,  $K = \mathbb{Z}_2$  und  $K = \mathbb{Z}_7$ . Was sind jeweils die irreduziblen Faktoren des Polynoms?

**Präsenzaufgabe 7:**

- (a) Bestimme alle Untergruppen der Gruppe  $\mathbb{D}_{10}$  aus Präsenzaufgabe 6.
- (b) Zeige, eine kommutativer Ring mit Eins ist genau dann ein Körper, wenn er nur zwei Ideale besitzt.
- (c) Sei  $M$  ein Menge und für  $A, B \subseteq M$  definieren wir die symmetrische Differenz als

$$A \Delta B := (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

Zeige, die Potenzmenge  $\mathcal{P}(M) = \{A \mid A \subseteq M\}$  ist mit  $\Delta$  als Addition und  $\cap$  als Multiplikation ein kommutativer Ring mit Eins. Ist der Ring ein Körper?