Fachbereich Mathematik
Thomas Markwig

Sommersemester 2024, Blatt 5

Paul Weiß

Mathematik für Informatik 2: Lineare Algebra

Abgabetermin: Freitag, 17.05.2024, 10:00

Aufgabe 10: Bearbeite **zwei** der folgenden sechs Teilaufgaben.

(a) Ist K ein Körper und $f \in K[t]$ ein Polynom mit $\deg(f) \in \{2, 3\}$.
Zeige, f ist genau dann irreduzibel, wenn f keine Nullstelle hat.

(b) Bestimme alle irreduziblen Polynome f in $\mathbb{Z}_2[t]$ vom Grad $\deg(f) \leq 4$.

(c) Zeige, hat ein normiertes Polynom $f = t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \ldots + a_0$ mit $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{Z}$ eine Nullstelle in $\lambda \in \mathbb{Q}$, dann gilt schon $\lambda \in \mathbb{Z}$.

(d) Ist $f = t^3 + 10t^2 - 881t + 2623 \in \mathbb{Q}[t]$ irreduzibel?

(e) Ist die Menge $I = \{f \in \mathbb{Q}[t] \mid f(0) = 1\}$ ein Ideal in $\mathbb{Q}[t]$?

(f) Teile das Polynom $f = 2t^5 - t^4 + 2t^3 - t + 1 \in K[t]$ mit Rest durch $g = t^2 + 2t + 3$ für $K = \mathbb{Q}$ und $K = \mathbb{F}_5$.

Aufgabe 11: Bearbeite **eine** der beiden folgenden Teilaufgaben.

(a) Gegeben seien folgende Matrizen und Vektoren über den reellen Zahlen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 8 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Berechne die folgenden Terme:

$$A + B, \quad B \circ x, \quad A \circ C \quad \text{und} \quad B \circ B^t.$$

(b)* Zeige, für $A \in \mathrm{Mat}(m \times n, K)$ und $B \in \mathrm{Mat}(n \times p, K)$ gilt $(A \circ B)^t = B^t \circ A^t$.

Aufgabe 12: Welche der folgenden Teilmengen von K^3 sind Unterräume des K^3? Begründe Deine Antworten.

(a) $\{(x_1, x_2, x_3)^t \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 \cdot x_2 = 2x_3\}$ für $K = \mathbb{R}$.

(b) $\{(x_1, x_2, x_3)^t \in \mathbb{R}^3 \mid ax_1 + x_2 + x_3 = a + 1\}$ für ein festes $a \in \mathbb{R}$ für $K = \mathbb{R}$.

(c) $\{(x_1, x_2, x_3)^t \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 \leq 0\}$ für $K = \mathbb{R}$.

(d) $\{(1, 0, 0)^t, (0, 1, 0)^t, (1, 1, 0)^t, (0, 0, 0)^t\}$ für $K = \mathbb{R}$ oder $K = \mathbb{F}_2$.

Präsenzaufgabe 8:

(a) Aus Aufgabe 10 wissen wir, dass das Polynom $t^2 + t + \overline{1} \in \mathbb{Z}_2[t]$ irreduzibel ist, weil es in $\mathbb{Z}_2$ keine Nullstelle hat.

(1) Zeige, dass die Menge

$$I = \{f \cdot (t^2 + t + \overline{1}) \mid f \in \mathbb{Z}_2[t]\}$$

ein Ideal in $\mathbb{Z}_2[t]$ und damit insbesondere eine Untergruppe von $(\mathbb{Z}_2[t], +)$ ist.

(2) Zeige, dass die Faktorgruppe $K := \mathbb{Z}_2[t]/I$ durch die Multiplikation

$$\overline{g} \cdot \overline{h} = \overline{g \cdot h}$$

ein kommutativer Ring mit Eins wird. Wie im Beweis von Satz 25.11 ist i.w. nur die Wohldefiniertheit der Multiplikation zu zeigen.

(3) Zeige, dass K in der Tat ein Körper ist und genau vier Elemente enthält.

(4) Sind die Gruppen $(K, +)$ und $(\mathbb{Z}_4, +)$ isomorph?

(b) Sei M eine Menge und $\mathcal{P}(M) = \{A \mid A \subseteq M\}$ die Potenzmenge von M. Wir definieren auf $\mathcal{P}(M)$ eine Addition mittels der symmetrischen Differenz

$$A \triangle B := (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

für $A, B \in \mathcal{P}(M)$ und eine Multiplikation mit Skalaren aus dem Körper $\mathbb{Z}_2 = \{\overline{0}, \overline{1}\}$ durch

$$\lambda \cdot A := \begin{cases} A, & \text{wenn } \lambda = \overline{1}, \\ \emptyset, & \text{wenn } \lambda = \overline{0}. \end{cases}$$

Zeige, daß $(\mathcal{P}(M), \triangle, \cdot)$ ein $\mathbb{Z}_2$-Vektorraum ist.