Mathematik für Informatik 2: Lineare Algebra

Abgabetermin: Freitag, 31.05.2024, 10:00

Aufgabe 13: Bearbeite **eine** der beiden Teilaufgaben.

(a) Zeige, die Mengen

$$U = \{(x_1, x_2, x_3)^t \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$$

und

$$U' = \operatorname{Lin}\left((1,0,0)^t\right)$$

sind Unterräume von $\mathbb{R}^3$ und es gilt $\mathbb{R}^3 = U \oplus U'$.

(b) Sei $V = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ der Vektorraum aller Abbildungen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$. Wir betrachten die Teilmengen

$$U = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \mid f(-x) = -f(x)\ \forall\, x \in \mathbb{R}\}$$

und

$$U' = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \mid f(-x) = f(x)\ \forall\, x \in \mathbb{R}\}.$$

Zeige, U und U' sind Unterräume von V und es gilt $V = U \oplus U'$.

Aufgabe 14: Bearbeite **eine** der drei Teilaufgaben.

(a) Berechne das Bild und den Kern der linearen Abbildung $f_A : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, die durch die folgende Matrix gegeben ist:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \operatorname{Mat}_2(\mathbb{R}).$$

(b) Zeige, dass die Abbildung

$$f : \mathbb{Z}_2^3 \longrightarrow \mathbb{Z}_2^3 : \left(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}\right)^t \mapsto \left(\overline{x} - \overline{y}, \overline{z}^2, \overline{x} - \overline{y}\right)^t$$

linear ist und berechne Bild und Kern von f.

(c) Berechne das Bild und den Kern der linearen Abbildung

$$D : P_2 \longrightarrow P_2 : p \mapsto p' - p'',$$

wobei P_2 der $\mathbb{R}$-Vektorraum der Polynome vom Grad kleiner oder gleich zwei ist und p' bzw. p'' die Ableitung bzw. zweite Ableitung des Polynoms p bezeichnet.

Aufgabe 15: Seien V, W zwei K-Vektorräume und $f, g \in \mathrm{Hom}_K(V, W)$. Zeige

$$\mathrm{Ker}(f+g) \supseteq \mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Ker}(g)$$

und

$$\mathrm{Im}(f+g) \subseteq \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Im}(g).$$

Finde außerdem Beispiele, sodass die Inklusionen strikt sind.

Präsenzaufgabe 9:

(a) Bestimme eine Matrix $A \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{Q})$, so dass

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \circ A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Interpretiere die Wirkung der linearen Abbildung $f_A : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ geometrisch, wenn A eine der folgenden Matrizen ist:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Wende die Abbildung dazu zunächst auf die Vektoren $e_1 = (1,0)^t$, $e_2 = (0,1)^t$ und $x = (2,3)^t$ an.

(c) Welche der folgenden Abbildungen ist eine lineare Abbildung?

(1) $f : K^3 \longrightarrow K^2 : (x,y,z)^t \mapsto (x + y \cdot z, x - y + z)^t$ mit $K = \mathbb{R}$ oder $K = \mathbb{F}_2$.

(2) $f : K^3 \longrightarrow K^3 : (x,y,z)^t \mapsto (2x - z, x - 2y + z, 3y - z)^t$ mit $K = \mathbb{Q}$ oder $K = \mathbb{F}_5$.

(3) $f : K^2 \longrightarrow K^2 : (x,y)^t \mapsto (x + y, 2x - y + 3)^t$ mit $K = \mathbb{C}$, $K = \mathbb{F}_5$ oder $K = \mathbb{F}_3$.

(4) $I : \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$I(f) := \int_0^1 f(t)\, dt.$$