Mathematik für Informatik 2

Kapitel III: Algebraische Strukturen

§22 Gruppen und Homomorphismen

A) Gruppen

Def. 22.1 ⓐ Eine **Gruppe** ist ein Paar $(G, \cdot)$ mit einer Menge G, die nicht leer ist, und einer zweistelligen Operation $\cdot : G \times G \longrightarrow G : (g,h) \mapsto g \cdot h = gh$, so dass folgende Axiome gelten:

(G1) $\forall g, h, k \in G : (g \cdot h) \cdot k = g \cdot (h \cdot k)$ Assoziativgesetz

(G2) $\exists e \in G : \forall g \in G : e \cdot g = g$ Existenz eines Neutralen

(G3) $\forall g \in G \; \exists \underset{=: g^{-1}}{g'} \in G : g' \cdot g = e$ Existenz von Inversen

ⓑ Eine Gruppe $(G, \cdot)$ heißt **abelsch**, wenn zudem (G4) gilt:

(G4) $\forall g, h \in G : g \cdot h = h \cdot g$ Kommutativgesetz

ⓒ Eine Gruppe $(G, \cdot)$ heißt **endlich**, wenn $|G| < \infty$. Sonst heißt sie **unendlich**.

Bsp. 22.3:

ⓐ $(\mathbb{Z}, +)$ ist eine abelsche Gruppe mit Neutralem 0 und $-g$ als Inversem zu g.

Genauso: $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{C}, +)$

Nicht: $(\mathbb{N}, +)$ keine Gruppe!

ⓑ $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$ ist eine abelsche Gruppe mit Neutralem 1 und $\frac{1}{g}$ als Inversem zu g.

Genauso: $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$, $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$

Nicht: $(\mathbb{Z} \setminus \{0\}, \cdot)$ ist keine Gruppe

ⓒ Sei M eine nicht-leere Menge.

Setze: $\mathrm{Sym}(M) := \{ f : M \to M \mid f \text{ ist bijektiv} \}$

Dann ist $(\mathrm{Sym}(M), \circ)$ eine Gruppe! (symmetrische Gruppe zu M)

$|M| \geq 3 \Rightarrow (\mathrm{Sym}(M), \circ)$ ist nicht abelsch ?

Lemma 22.4: Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe.

ⓐ Sei $e \in G$ ein neutrales Element, dann gilt zudem $g \cdot e = g$ $\forall g \in G$. Außerdem ist das Neutrale eindeutig bestimmt.

ⓑ Sei $g \in G$ und $g' \in G$ ein Inverses zu g, dann gilt auch $g \cdot g' = e$. Außerdem ist das Inverse eindeutig bestimmt.

Beweis:

Sei $g \in G$ und $g' \in G$ ein Inverses.

Zeige: $g \cdot g' = e$

- Ⓖ3 $\Rightarrow g'' \in G : \; g'' \cdot g' = e$
- $g \cdot g' \underset{\text{G2}}{=} e \cdot (g \cdot g') = (g'' \cdot g') \cdot (g \cdot g') \underset{\text{G1}}{=} g'' \cdot (g' \cdot (g \cdot g'))$

$\underset{\text{G1}}{=} g'' \cdot (\underbrace{(g' \cdot g)}_{=e} \cdot g') \underset{\text{G3}}{=} g'' \cdot (e \cdot g') \underset{\text{G2}}{=} g'' \cdot g' = e$

Rest: ÜA. $\square$

Lemma 22.6: Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe, $g, h, a, b \in G$, $m, n \in \mathbb{Z}$.

ⓐ Kürzungsregeln:
- $g \cdot a = g \cdot b \Rightarrow a = b$
- $a \cdot g = b \cdot g \Rightarrow a = b$

ⓑ $(g^{-1})^{-1} = g$, $(g \cdot h)^{-1} = h^{-1} \cdot g^{-1}$

ⓒ $g^n \cdot g^m = g^{n+m}$, $(g^m)^n = g^{m \cdot n}$ (Potenzgesetze)

$g^n = \underbrace{g \cdot g \cdots g}_{n\text{-mal}}$, wenn $n > 0$

$g^{-n} = \underbrace{g^{-1} \cdots g^{-1}}_{n\text{-mal}}$ wenn $n > 0$

$g^0 := e$

Potenzgesetze in einer additiven Gruppe $(G,+)$

$(n\cdot g)+(m\cdot g) = (n+m)\cdot g$, $n\cdot(m\cdot g) = (n\cdot m)\cdot g$

Wenn $(G,+)$ Gruppe, dann schreibe $n\cdot g$ statt g^n

Beweis:

ⓐ $g\cdot a = g\cdot b \Rightarrow \underset{\underset{e\cdot a = a}{\parallel}}{(g^{-1}\cdot g)\cdot a} = g^{-1}\cdot(g\cdot a) = g^{-1}\cdot(g\cdot b) = \underset{\underset{b = e\cdot b}{\parallel}}{(g^{-1}\cdot g)\cdot b}$

ⓑ · $g\cdot g^{-1} \underset{2.4}{=} e \Rightarrow g$ verhält sich wie das Inverse von g^{-1}

$\underset{\text{Eindeutigkeit}}{\Rightarrow} g = (g^{-1})^{-1}$

· $(h^{-1}g^{-1})\cdot(g\cdot h) = h^{-1}\cdot(g^{-1}\cdot(g\cdot h)) = h^{-1}\cdot(\underbrace{(g^{-1}\cdot g)}_{=e}\cdot h) = h^{-1}\cdot(e\cdot h)$

$= h^{-1}\cdot h = e \underset{2.4}{\Rightarrow} (g\cdot h)^{-1} = h^{-1}\cdot g^{-1}$

ⓒ ÜA. □

B) Untergruppen

Def. 22.7: Sei $(G,\cdot)$ eine Gruppe, $\emptyset \neq U \subseteq G$.

Dann heißt U eine Untergruppe von G

:⟺ ① $\forall u,v \in U: u\cdot v \in U$ Abgeschlossenheit bzgl. "·"

② $\forall u \in U: u^{-1} \in U$ " bzgl. Inversen

Notation: $U \leq G$

Prop. 22.8: Sei $(G,\cdot)$ eine Gruppe und $U \leq G$. Dann ist $(U,\cdot)$ eine Gruppe mit Neutralem e_G und Inversem u_G^{-1} zu $u \in U$.

Beweis: ? $\cdot: U\times U \rightarrow \underline{\underline{U}} : (u,v) \longmapsto \underset{\underset{U}{\overset{①}{\cap}}}{u\cdot v}$!

· (G1) geschenkt von G

· (G2): $U\neq\emptyset \Rightarrow \exists u \in U \underset{②}{\Rightarrow} u^{-1}\in U \underset{②}{\Rightarrow} \overset{=e_G}{u^{-1}\cdot u} \in U \Rightarrow \forall v\in U: e_G\cdot v = v$

· (G3): $u\in U \underset{②}{\Rightarrow} u_G^{-1}\in U \Rightarrow u_G^{-1}\cdot u = e_G = e_U$ □

Bsp. 22.9:

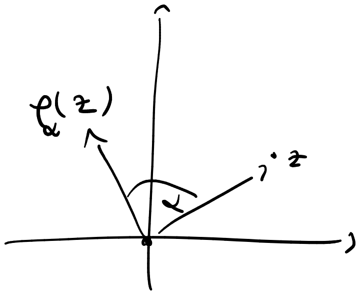
ⓐ Ist $(G,\cdot)$ eine Gruppe, dann ist $G \leq G$ und $\{e_G\} \leq G$

(triviale Untergruppen)

ⓑ $\{1,-1\} \leq (\mathbb{Q}\setminus\{0\},\cdot)$

ⓒ $\alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \varphi_\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : \binom{x}{y} \mapsto \begin{pmatrix}\cos(\alpha)\cdot x - \sin(\alpha)\cdot y \\ \sin(\alpha)\cdot x + \cos(\alpha)\cdot y\end{pmatrix}$

Drehung um den Ursprung
um den Winkel α

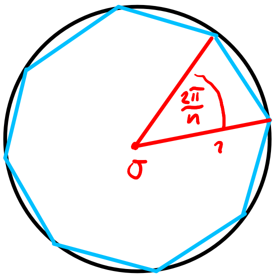


Setze: $SO(2) := \{\varphi_\alpha \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$
$= \{\varphi_\alpha \mid \alpha \in [0,2\pi)\}$

Beachte: $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta = \varphi_{\alpha+\beta} \in SO(2)$, $(\varphi_\alpha)^{-1} = \varphi_{-\alpha} \in SO(2)$

$\Rightarrow SO(2) \leq \mathrm{Sym}(\mathbb{R}^2)$

ⓓ Sei E_n das reguläre n-Eck im $\mathbb{R}^2$.



Setze: $\mathcal{U} := \{\varphi_\alpha \in SO(2) \mid \varphi_\alpha(E_n) = E_n\}$

Beh: $\mathcal{U} \leq SO(2)$ $\qquad \overset{\parallel\,!}{\{\varphi_\alpha \mid \alpha = k\cdot\frac{2\pi}{n}, k=0,\dots,n-1\}}$

Denn: • $id_{\mathbb{R}^2} \in \mathcal{U} \subseteq SO(2) \Rightarrow \mathcal{U} \neq \emptyset$

• Seien $\varphi_\alpha, \varphi_\beta \in \mathcal{U}$

$\Rightarrow (\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta)(E_n) = \varphi_\alpha(\underbrace{\varphi_\beta(E_n)}_{= E_n}) = \varphi_\alpha(E_n) = E_n$

$\Rightarrow \varphi_\alpha \circ \varphi_\beta \in \mathcal{U}$

• Sei $\varphi_\alpha \in \mathcal{U} \Rightarrow \varphi_\alpha^{-1}(E_n) = \varphi_\alpha^{-1}(\varphi_\alpha(E_n)) = (\varphi_\alpha^{-1} \circ \varphi_\alpha)(E_n)$

$\varphi_\alpha^{-1} \in \mathcal{U} \Leftarrow \qquad E_n = id_{\mathbb{R}^2}(E_n)$

• Damit: $\mathcal{U} \leq SO(2)$. $\boxtimes$

ⓔ Sei $n \in \mathbb{Z}$.

Dann ist $n\cdot\mathbb{Z} := \{ n\cdot z \mid z \in \mathbb{Z} \}$ ist Untergruppe von $(\mathbb{Z},+)$

Beweis: • $0 = n\cdot 0 \in n\cdot\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Z}$, also: $n\cdot\mathbb{Z} \neq \emptyset$

• Seien $n\cdot z,\ n\cdot z' \in n\cdot\mathbb{Z}$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow \bullet\ n\cdot z + n\cdot z' = n\cdot(\underbrace{z+z'}_{\rotatebox{90}{$\in$}\ \mathbb{Z}}) \in n\cdot\mathbb{Z} \\[2ex] \bullet\ -(n\cdot z) = n\cdot(\underset{\mathbb{Z}}{\underset{\rotatebox{90}{$\in$}}{-z}}) \in n\cdot\mathbb{Z} \end{array}\right\} \Rightarrow n\cdot\mathbb{Z} \leq \mathbb{Z}$$

$\square$

Beachte: $m, n \in \mathbb{Z} \Rightarrow \Big(m\cdot\mathbb{Z} \subseteq n\cdot\mathbb{Z} \Leftrightarrow$ m ist ein Vielfaches von n

$\Leftrightarrow n \mid m \Big)$

ⓕ • $(\mathbb{Z},+) \leq (\mathbb{Q},+) \leq (\mathbb{R},+) \leq (\mathbb{C},+)$

• $(\mathbb{Q}\setminus\{0\},\cdot) \leq (\mathbb{R}\setminus\{0\},\cdot) \leq (\mathbb{C}\setminus\{0\},\cdot)$

Lemma 22.11

Sei $(G,\cdot)$ eine Gruppe und $U_i \leq G$ mit $i \in I$ = Indexmenge

Dann: $\bigcap_{i\in I} U_i \leq G$.

Beweis: ÜA. $\square$

Bem. 22.12:

Gilt: $2\cdot\mathbb{Z} \cup 3\cdot\mathbb{Z} \leq \mathbb{Z}$?!!

$$\begin{array}{ccccc} 2\cdot\mathbb{Z} & \cup & 3\cdot\mathbb{Z} & & \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} & & \\ 2 & + & 3 & = & 5 \\ & & & & \rotatebox{90}{$\not\in$} \\ & & & & 2\cdot\mathbb{Z} \cup 3\cdot\mathbb{Z} \end{array}$$

kein Vielfaches von 2

kein Vielfaches von 3

Also: $2\mathbb{Z} \cup 3\mathbb{Z} \not\leq \mathbb{Z}$

Def. 22.12: Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe, $M \subseteq G$.

Dann heißt $\langle M \rangle := \bigcap\limits_{\substack{U \leq G \\ M \subseteq U}} U$ = Durchschnitt aller Untergruppen, die M enthalten $\underset{22.11}{\leq} G$

das Erzeugnis von M (in G) und ist

die kleinste Untergruppe, die M enthält.

Prop. 22.13 Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe, $M \subseteq G$.

Dann: $\langle M \rangle = \{ g_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot g_n^{\alpha_n} \mid g_1, \ldots, g_n \in M,\ \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{Z},\ n \geq 0 \}$

Beweis:

"$\supseteq$"

$$\left.\begin{aligned} & g_1, \ldots, g_n \in M,\ \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{Z} \\ & M \subseteq U \leq G \end{aligned}\right\} \Rightarrow g_1^{\alpha_1} \cdots g_n^{\alpha_n} \in U$$

$$\Downarrow$$

$$g_1^{\alpha_1} \cdots g_n^{\alpha_n} \in \bigcap_{\substack{V \leq G \\ M \subseteq V}} V = \langle M \rangle$$

"$\subseteq$" Zeige: Rechte Seite ist eine Ugr. von G, die M enthält

- $g_1^{\alpha_1} \cdots g_n^{\alpha_n} \in$ R.S., $g_{n+1}^{\alpha_{n+1}} \cdots g_m^{\alpha_m} \in$ R.S.

$$\left.\begin{aligned} \Rightarrow \cdot\ & g_1^{\alpha_1} \cdots g_n^{\alpha_n} \cdot g_{n+1}^{\alpha_{n+1}} \cdots g_m^{\alpha_m} \in \text{R.S.} \\ \cdot\ & (g_1^{\alpha_1} \cdots g_n^{\alpha_n})^{-1} = g_n^{-\alpha_n} \cdots g_1^{-\alpha_1} \in \text{R.S.} \\ \cdot\ & \text{leeres Produkt} = e_G \text{ liegt in R.S.} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{R.S} \leq G$$

- $g \in M \Rightarrow g^1 \in$ R.S. $\Rightarrow M \subseteq$ R.S.

Damit $\langle M \rangle = \bigcap\limits_{\substack{U \leq G \\ M \subseteq U}} U \subseteq$ R.S.

$\square$

Bsp. 22.14: Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe und $g \in G$.

$\Rightarrow \quad \langle g \rangle = \bigcap_{\substack{U \le G \\ g \in U}} U = \{ g^k \mid k \in \mathbb{Z} \}$ ⇝ zyklische Gruppe

Konkret: $G = \mathbb{Z}$, "$\cdot$" = "$+$", $n \in \mathbb{Z}$

$$\langle n \rangle = \{ k \cdot n \mid k \in \mathbb{Z} \} = \{ n \cdot z \mid z \in \mathbb{Z} \} = n \cdot \mathbb{Z}$$

Def. 22.15: Eine Gruppe $(G, \cdot)$ heißt zyklisch, wenn ein $g \in G$ existiert, s.d. $G = \langle g \rangle = \{ g^k \mid k \in \mathbb{Z} \}$.

Prop. 22.16: $U \le \mathbb{Z} \iff \exists\, n \ge 0 : U = \langle n \rangle = n \cdot \mathbb{Z}$

Insbesondere: jede Untergruppe von $(\mathbb{Z}, +)$ ist zyklisch!

Beweis: "$\Leftarrow$" $U = n \cdot \mathbb{Z} \Rightarrow U \le G$ nach Bsp. 22.9.

"$\Rightarrow$" Sei $U \le \mathbb{Z}$.

1. Fall: $U = \{0\} \Rightarrow U = \langle 0 \rangle = 0 \cdot \mathbb{Z}$

2. Fall: $U \ne \{0\} \Rightarrow \exists\, 0 \ne z \in U \Rightarrow \underset{U}{\underset{\cap}{z}}$ oder $\underset{U}{\underset{\cap}{-z}}$ ist positiv

$\Rightarrow \{ m \in \mathbb{N} \mid 0 \ne m \in U \} \ne \emptyset$

$\underset{\text{Archim. Prinzip}}{\Rightarrow} \exists \quad n := \min \{ m \in \mathbb{N} \mid 0 \ne m \in U \}$

Zeige: $U \overset{!}{=} \langle n \rangle = n \cdot \mathbb{Z}$

- $n \in U \Rightarrow n \cdot z \in U \;\; \forall z \in \mathbb{Z} \Rightarrow n \cdot \mathbb{Z} \subseteq U$
- Sei $u \in U \underset{\text{D.m.R.}}{\Rightarrow} \exists\, q, r \in \mathbb{Z} : u = q \cdot n + r$ mit $0 \le r < n$

$\Rightarrow \underset{\mathbb{N}}{\underset{\cap}{r}} = \underset{U}{\underset{\cap}{u}} - \underset{U}{\underset{\cap}{q \cdot n}} \in U \xRightarrow[\substack{\nexists \\ n = \min\{\dots\}}]{} r = 0$

$\Rightarrow u = q \cdot n = n \cdot q \in n \cdot \mathbb{Z} \Rightarrow U \subseteq n \cdot \mathbb{Z}$. $\square$

c) Gruppenhomomorphismus

Def. 22.17 Seien $(G,\cdot)$ und $(H,*)$ zwei Gruppen.

Eine Abbildung $\alpha : G \longrightarrow H$ heißt Gruppenhomomorphismus

$$:\Longleftrightarrow \quad \forall g, \tilde{g} \in G : \quad \alpha(g\cdot\tilde{g}) = \alpha(g) * \alpha(\tilde{g})$$

Bsp. 22.18:

ⓐ Sei $a \in \mathbb{R}$ und betrachte $(\mathbb{R},+)$.

$\Longrightarrow$ $m_a : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto a\cdot x$ ist ein G.H.

Denn: Seien $x, y \in \mathbb{R}$

$$\Longrightarrow \quad m_a(x+y) = a\cdot(x+y) = a\cdot x + a\cdot y = m_a(x) + m_a(y)$$

ⓑ Sei $(G,\cdot)$ eine Gruppe und $\boxed{\overset{\overset{e}{\neq}}{g} \in G}$.

- $L_g : G \to G : h \mapsto g\cdot h$
- $R_g : G \to G : h \mapsto h\cdot g$

sind kein G.H.

Denn:
$$L_g(g\cdot g) = g\cdot(g\cdot g) = g^3$$
$$\neq$$
$$L_g(g)\cdot L_g(g) = (g\cdot g)\cdot(g\cdot g) = g^4$$

sonst: $\underset{\shortparallel}{e\cdot g^3}\quad \underset{\shortparallel}{g\cdot g^3}$
$$g^3 = g^4$$
$\overset{\Longrightarrow}{KR}$ $e = g$ ↯

ⓒ Sei $(G,\cdot)$ eine Gruppe, $g \in G$.

Dann ist $i_g : G \longrightarrow G : h \longmapsto \underset{=:\, h^g}{\boxed{g\cdot h\cdot g^{-1}}}$ ist ein G.H.

(Konjugation mit g)

Denn: Seien $h, \tilde{h} \in G$.

$$\Longrightarrow \quad i_g(h\cdot\tilde{h}) = g\cdot(h\cdot\tilde{h})\cdot g^{-1} = g\cdot h\cdot e\cdot\tilde{h}\cdot g^{-1} = g\cdot h\cdot g^{-1}\cdot g\cdot\tilde{h}\cdot g^{-1}$$
$$= (g\cdot h\cdot g^{-1})\cdot(g\cdot\tilde{h}\cdot g^{-1}) = i_g(h)\cdot i_g(\tilde{h})$$

Beachte: $i_g = R_{g^{-1}} \circ L_g$

Lemma 22.19

Seien $\alpha_1 : (G_1, \cdot) \longrightarrow (G_2, *)$ und $\alpha_2 : (G_2, *) \longrightarrow (G_3, \times)$ G.H.

Dann: $\alpha_2 \circ \alpha_1 : (G_1, \cdot) \longrightarrow (G_3, \times)$ ist ein G.H.

Beweis:

Seien $g, h \in G_1$

$$\Rightarrow (\alpha_2 \circ \alpha_1)(g \cdot h) = \alpha_2(\alpha_1(g \cdot h)) \overset{\alpha_1 \text{ ist G.H.}}{=} \alpha_2\big(\alpha_1(g) * \alpha_1(h)\big)$$

$$\underset{\alpha_2 \text{ ist G.H.}}{=} \alpha_2(\alpha_1(g)) \times \alpha_2(\alpha_1(h)) = (\alpha_2 \circ \alpha_1)(g) \times (\alpha_2 \circ \alpha_1)(h)$$

$\square$

Def. 22.20:

Sei $\alpha : (G, \cdot) \longrightarrow (H, *)$ ein G.H.

ⓐ α heißt Isomorphismus $:\Longleftrightarrow$ α ist bijektiv.

ⓑ Wir sagen $(G, \cdot)$ und $(H, *)$ sind isomorph, wenn: $\exists\ \alpha : G \to H$ Isomorphismus

Notation: $G \cong H$

Bsp. 22.21:

ⓐ $m_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ x \mapsto a \cdot x$ ist Isomorphismus $\Longleftrightarrow$ $a \neq 0$

Denn dann: $m_a^{-1} = m_{\frac{1}{a}}$!

ⓑ $i_g : G \to G;\ h \mapsto g \cdot h \cdot g^{-1}$ ist ein Isomorphismus

mit $(i_g)^{-1} = i_{g^{-1}}$

Denn: $i_{g^{-1}}(i_g(h)) = (g^{-1})\,(g \cdot h \cdot g^{-1})\,(g^{-1})^{-1}$

$$= \underbrace{g^{-1} \cdot g}_{=e} \cdot h \cdot \underbrace{g^{-1} \cdot (g^{-1})^{-1}}_{=e} = h$$

$\Rightarrow i_{g^{-1}} \circ i_g = id_G$. Umgekehrt genauso. $\square$

Prop. 22.22 . Sei $\alpha : (G,\cdot) \longrightarrow (H,*)$ ein Gruppenhomom.

ⓐ $\alpha(e_G) = e_H$ ⓑ $\alpha(g^{-1}) = \alpha(g)^{-1} \quad \forall g \in G$

ⓒ $\alpha(g^n) = (\alpha(g))^n \quad \forall g \in G \quad \forall n \in \mathbb{Z}$

ⓓ α bijektiv $\Rightarrow$ $\alpha^{-1}: H \longrightarrow G$ ist ein Gruppenhomomorphismus.

ⓔ $\mathcal{U} \leq G \Rightarrow \alpha(\mathcal{U}) \leq H$ "Bild von $\mathcal{U}$ unter α"

ⓕ $V \leq H \Rightarrow \alpha^{-1}(V) = \{g \in G \mid \alpha(g) \in V\} \leq G$ "Urbild von V unter α"

ⓖ $\mathrm{Im}(\alpha) := \alpha(G) = \{\alpha(g) \mid g \in G\} \leq H$ "Bild von α"

ⓗ $\mathrm{Ker}(\alpha) := \alpha^{-1}(e_H) = \{g \in G \mid \alpha(g) = e_H\} \leq G$ "Kern (α)"

Beweis ⓐ $e_H * \cancel{\alpha(e_G)} = \alpha(e_G) = \alpha(e_G \cdot e_G) = \alpha(e_G) * \cancel{\alpha(e_G)}$

$\underset{KR}{\Rightarrow} \quad e_H = \alpha(e_G)$

ⓑ $\alpha(g^{-1}) * \alpha(g) = \alpha(g^{-1} \cdot g) = \alpha(e_G) \underset{ⓐ}{=} e_H \Rightarrow \alpha(g^{-1}) = (\alpha(g))^{-1}$

ⓒ ① $n \geq 0$: Induktion nach n

$n=0$: $\alpha(g^0) = \alpha(e_G) = e_H = (\alpha(g))^0$ ✓

$n-1 \mapsto n$: $\alpha(g^n) = \alpha(g^{n-1} \cdot g) = \alpha(g^{n-1}) * \alpha(g) \underset{\text{Ind.}}{=} (\alpha(g))^{n-1} * \alpha(g)$

$= (\alpha(g))^n$

② $n < 0$: $\Rightarrow -n > 0 \Rightarrow \alpha(g^n) = \alpha((g^{-1})^{-n}) \underset{①}{=} (\alpha(g^{-1}))^{-n}$

$\underset{ⓑ}{=} ((\alpha(g))^{-1})^{-n} = (\alpha(g))^n$

ⓓ Sei α bijektiv. Seien $u, v \in H$. Setze: $g := \alpha^{-1}(u)$, $h := \alpha^{-1}(v)$

$\Rightarrow \alpha(g) = u, \quad \alpha(h) = v$

$\Rightarrow \alpha^{-1}(u * v) = \alpha^{-1}(\alpha(g) * \alpha(h)) = \underline{\alpha^{-1}}(\alpha(g \cdot h)) = \underset{\alpha^{-1}(u) \cdot \alpha^{-1}(v)}{\underset{\parallel}{g \cdot h}}$

$\Rightarrow \alpha^{-1}$ ist G.H.

ⓔ Sei $\mathcal{U} \leq G$. Seien $u, v \in \alpha(\mathcal{U}) \Rightarrow \exists g, h \in \mathcal{U}$:
$u = \alpha(g), \quad v = \alpha(h)$

$$\Rightarrow \quad \cdot \quad u * v = \alpha(g) * \alpha(h) = \alpha(\underbrace{g \cdot h}_{\in \mathcal{U},\ \text{weil } \mathcal{U} \le G}) \in \alpha(\mathcal{U})$$

$$\cdot \quad u^{-1} = \alpha(g)^{-1} \underset{(b)}{=} \alpha(\overset{\in \mathcal{U},\ \text{weil } \mathcal{U} \le G}{\widetilde{g^{-1}}}) \in \alpha(\mathcal{U})$$

(f) analog (g) folgt aus (e) (h) folgt aus (f). □

Lemma 22.23

Ein G.H. $\alpha : (G, \cdot) \to (H, *)$ ist injektiv $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Ker}(\alpha) = \{e_G\}$

Proof:

"$\Rightarrow$" $\cdot$ 22.22 $\Rightarrow e_H = \alpha(e_G) \Rightarrow e_G \in \mathrm{Ker}(\alpha) \Rightarrow \{e_G\} \subseteq \mathrm{Ker}(\alpha)$

$\cdot$ $g \in \mathrm{Ker}(\alpha) \Rightarrow \alpha(g) = e_H = \alpha(e_G) \underset{\alpha \text{ injektiv}}{\Longrightarrow} g = e_G \Rightarrow \mathrm{Ker}(\alpha) \subseteq \{e_G\}$

"$\Leftarrow$" Seien $g, h \in G$ mit $\alpha(g) = \alpha(h)$

$\Rightarrow e_H = \alpha(g)^{-1} * \alpha(h) = \alpha(g^{-1}) * \alpha(h) = \alpha(g^{-1} \cdot h)$

$\Rightarrow g^{-1} \cdot h \in \mathrm{Ker}(\alpha) = \{e_G\} \Rightarrow g^{-1} \cdot h = e_G \Rightarrow h = g$

$\Rightarrow \alpha$ ist injektiv □

§ 23 Die symmetrische Gruppe S_n

Def. 23.1

- Eine bijektive Abbildung $\sigma : \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\}$ heißt eine Permutation.
- $S_n := \mathrm{Sym}(\{1, \dots, n\}) = \{\sigma : \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\} \mid \text{bijektiv}\}$ heißt die symmetrische Gruppe vom Grad n
- Eine Permutation $\sigma \in S_n$ ist eindeutig durch ihre Werttabelle festgelegt.

$$\sigma \mathrel{\hat{=}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n-1 & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \sigma(4) & & \sigma(n-1) & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

#Möglichkeiten: $\widetilde{n}$ $\widetilde{n-1}$ $n-2$ $n-3$ $\cdots$ 2 1

Bemerk, es kommt nicht auf die Reihenfolge der Spalten an;

d.h. wenn $\{1, \dots, n\} = \{a_1, \dots, a_n\}$, dann

$$\sigma = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ \sigma(a_1) & \sigma(a_2) & \cdots & \sigma(a_n) \end{pmatrix}$$

Bem. 23.2:

- $(S_n, \circ)$ ist eine Gruppe, wobei $\circ$ = Verkettung von Abb.
- $|S_n| = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdots 2\cdot 1 = n!$

Bsp. 23.3:

- $n \geq 3 \Rightarrow (S_n, \circ)$ ist nicht abelsch

Seien $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n \\ 2 & 1 & 3 & 4 & \cdots & n \end{pmatrix}$, $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n \\ 2 & 3 & 1 & 4 & \cdots & n \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} (\sigma\circ\tau)(1) = \sigma(\tau(1)) = \sigma(2) = 1 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \neq \\ (\tau\circ\sigma)(1) = \tau(\sigma(1)) = \tau(2) = 3 \end{array} \quad \Rightarrow \sigma\circ\tau \neq \tau\circ\sigma$$

- $n = 3$: $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \sigma\circ\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\neq$$

$$\tau\circ\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Bemerk: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Bem. 23.4: (Invertieren von Permutationen)

$$\sigma = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ \sigma(a_1) & \sigma(a_2) & \cdots & \sigma(a_n) \end{pmatrix} \Rightarrow \sigma^{-1} = \begin{pmatrix} \sigma(a_1) & \sigma(a_2) & \cdots & \sigma(a_n) \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$$

d.h. Invertieren bedeutet die beiden Zeilen tauschen!

z.B: $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

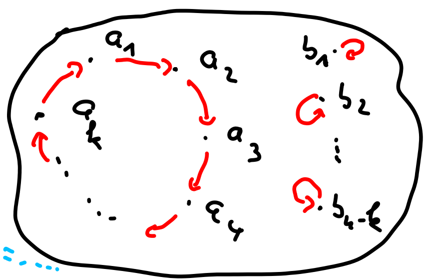
Def. 23.5

ⓐ Sei $\{1, \dots, n\} = \{a_1, \dots, a_k\} \,\dot\cup\, \{b_1, \dots, b_{n-k}\}$, $k \geq 2$

Dann heißt $\sigma = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{k-1} & a_k & b_1 & \cdots & b_{n-k} \\ a_2 & a_3 & \cdots & a_k & a_1 & b_1 & \cdots & b_{n-k} \end{pmatrix}$

$=:$ $(a_1\, a_2\, a_3 \cdots a_k) = (a_k\, a_1\, a_2 \cdots a_{k-1}) = \dots$

ein k-Zykel.



ⓑ Ein 2-Zykel heißt auch Transposition, d.h. es gibt zwei Zahlen $i \neq j \in \{1,\dots,n\}$, die von der Transposition $(i\,j)$ vertauscht werden.

ⓒ Schreibe: id statt $id_{\{1,\dots,n\}}$

Bem. 23.6:

- $\sigma = \begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&3&2\end{pmatrix} \in S_4$, $\tau = \begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\4&1&3&2&5\end{pmatrix} \in S_5$

  $\sigma = (1\;4\;2)$, $\tau = (1\;4\;2)$

  Ich sehe der Zykelschreibweise nicht an, in welcher S_n die Permutation liegt.

- $\tau = (i\,j) \Rightarrow \tau^{-1} = (i\,j) \Rightarrow \tau^2 = id$

- $|S_2| = 2$, $|S_3| = 6$, $|S_4| = 24$, $\dots$, $|S_{60}| \approx 10^{82}$

Satz 23.7

ⓐ Jede Permutation lässt sich als Produkt disjunkter Zykel schreiben.

" " " " " " von Transpositionen schreiben.

ⓑ " " " " " " " " benachbarter Zahlen

ⓒ " " " " " " schreiben.

ⓓ $\exists_1$ G.H. $sgn : (S_n, \circ) \longrightarrow (\{1,-1\}, \cdot)$ s.d. $sgn(\tau) = -1$ für jede Transposition τ. (Signum)

Insbesondere: σ = Produkt von k Transp. $\Rightarrow sgn(\sigma) = (-1)^k$

ⓔ $\forall \sigma \in S_n$: $sgn(\sigma) = sgn(\sigma^{-1})$

ⓕ $A_n := Ker(sgn) = \{\sigma \in S_n \mid sgn(\sigma) = 1\}$ und $\tau = (i\,j) \in S_n$

$\Rightarrow S_n = A_n \,\dot{\cup}\, A_n\tau$, wobei $A_n\tau = \{\sigma \circ \tau \mid \sigma \in A_n\}$

Bem. 23.8:

- sgn G.H. $\Rightarrow sgn(\sigma \circ \tau) = sgn(\sigma) \cdot sgn(\tau) \quad \forall \sigma, \tau$
- $\sigma = \tau_1 \circ \dots \circ \tau_k$ mit τ_i = Transposition $\Rightarrow sgn(\sigma) = \prod_{i=1}^{k} sgn(\tau_i) = (-1)^k$

Beispiel 23.9

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \in S_5.$$

$$\Rightarrow \quad \sigma = (1\ 2\ 5) \circ (3\ 4)$$

Bsp. 23.10

- $$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 8 & 7 & 1 & 4 & 5 & 6 & 9 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \underbrace{(1\ 3\ 7\ 6\ 5\ 4)}_{=:\tau} \circ \underbrace{(2\ 8\ 9)}_{\overset{\shortparallel}{\pi}}$$

- $$\tau = (1\ 3\ 7\ 6\ 5\ 4) = \overbrace{(1\,3)(3\,7)(7\,6)(6\,5)(5\,4)}^{=:\tau'}$$

u	$\tau(u)$	$\tau'(u)$
1	3	3
4	1	1
6	5	5
⋮	⋮	⋮

- $$\pi = (2\,8)(8\,9)$$

$$\Rightarrow \quad \sigma = \tau \circ \pi = (1\,3)(3\,7)(7\,6)(6\,5)(5\,4)(2\,8)(8\,9)$$

$$\Rightarrow \quad \operatorname{sgn}(\sigma) = (-1)^7 = -1$$

- $$\overset{\omega}{\overset{\shortparallel}{(3\,7)}} = \overbrace{(3\,4)(4\,6)(5\,6)(6\,7)(6\,5)(5\,4)(4\,3)}^{=:\omega'}$$

u	$\omega(u)$	$\omega'(u)$
3	7	7
7	3	3
5	5	5
2	2	2

Bsp. 23.11

$$S_3 = \left\{ id, \begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix} \right\}$$

$id = \begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix} = (1) = (2) = (1)(2)(3)$

$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix} = (12)$

$\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix} = (13)$

$\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix} = (1)(23) = (23)$

$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix} = (123) = (12)(23)$

$\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix} = (132) = (13)(32)$

$\boxed{\text{sgn:}}$ $\quad 1 \quad -1 \quad -1 \quad -1 \quad (-1)^2 = 1 \quad (-1)^2 = 1$

$$\Rightarrow \quad A_3 = \{ id, \overset{\sigma}{\overset{\|}{(123)}}, \overset{\sigma^{-1}}{\overset{\|}{(132)}} \} \leq S_3$$

$(123)\circ(132) = (1)(2)(3) = id$

$(12573)^{-1} = (37521)$

$$\Rightarrow \quad S_3 = A_3 \,\dot{\cup}\, A_3 \circ (12)$$

denn: $A_3 \circ (12) = \{ (12), \underset{\overset{\|}{(13)}}{(123)\circ(12)}, \underset{\overset{\|}{(23)}}{(132)\circ(12)} \}$

---

§ 24 Der Satz von Lagrange und Faktorgruppen

A) Linksnebenklassen

Notation 24.1: Sei $(G,\cdot)$ eine Gruppe, $A, B \subseteq G$, $g \in G$.

Dann:
- $A \cdot B := \{ a \cdot b \mid a \in A, b \in B \}$
- $g \cdot A := \{ g \cdot a \mid a \in A \}$ = Linksnebenklasse von A bzg. g.

Beachte: $A, B, C \subseteq G \Rightarrow (A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C) = \{ a \cdot b \cdot c \mid a \in A, b \in B, c \in C \}$

Proposition 24.2 Sei $(G,\cdot)$ eine Gruppe, $U \leq G$, $g, h \in G$

Definiere: $g \sim h \;:\Longleftrightarrow\; g^{-1}\cdot h \in U$

Dann ist $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf G

Zudem: Äquivalenzklasse von g bez. $\sim$ ist $\bar{g} = g\cdot U = \{g\cdot u \mid u \in U\}$

" Linksnebenklasse von U bez. g

Setze: · $G/U := \{\bar{g} \mid g \in G\}$ = Menge aller Linksnebenklassen von U

· $|G:U| := |G/U|$ = Anzahl der Linksnebenklassen von U heißt der Index von U in G.

Beweis: Ⓐ1 Reflexivität: $g^{-1}\cdot g = e \in U \Rightarrow g \sim g$

Ⓐ2 Symmetrie: $g \sim h \Rightarrow g^{-1}\cdot h \in U \Rightarrow U \ni (g^{-1}\cdot h)^{-1} = h^{-1}\cdot(g^{-1})^{-1} = h^{-1}\cdot g$

$\Rightarrow h \sim g$

Ⓐ3 Transitivität: $g \sim h,\; h \sim k \Rightarrow g^{-1}\cdot h,\; h^{-1}\cdot k \in U$

$\Rightarrow U \ni (g^{-1}\cdot h)\cdot(h^{-1}\cdot k) = g^{-1}\cdot \cancel{h\cdot h^{-1}}\cdot k = g^{-1}\cdot k$

$\Rightarrow g \sim k$

Zeige noch: $\bar{g} = \{h \in G \mid h \sim g\} \overset{!}{=} gU$

"$\supseteq$" Sei $u \in U$. z.z.: $g\cdot u \sim g$ (d.h. $g\cdot u \in \bar{g}$)

Aber: $(g\cdot u)^{-1}\cdot g = u^{-1}\cdot \cancel{g^{-1}\cdot g} = u^{-1} \in U \Rightarrow g\cdot u \sim g$

"$\subseteq$" Sei $h \in G$ mit $h \sim g \Rightarrow h^{-1}\cdot g \in U$

$\Rightarrow \underset{g^{-1}(h^{-1})^{-1} = g^{-1}\cdot h}{\underset{\parallel}{(h^{-1}\cdot g)^{-1}}} \in U \Rightarrow g\cdot U \ni g\cdot(g^{-1}\cdot h) = \cancel{g\cdot g^{-1}}\cdot h = h$

Korollar 24.3

Sei $(G,\cdot)$ eine Gruppe und $\mathcal{U} \leq G$.

Dann: $\cdot\ \forall g, h \in G:\quad g\cdot\mathcal{U} \cap h\cdot\mathcal{U} = \emptyset$ oder $g\mathcal{U} = h\mathcal{U}$

$$\cdot\quad G = \dot{\bigcup_{\lambda\in G/\mathcal{U}}} \lambda = \dot{\bigcup_{\lambda\in G/\mathcal{U}}} g_\lambda\cdot\mathcal{U}$$

wobei $g_\lambda \in \lambda$ ein Repräsentant der Linksnebenklasse ist.

Bsp. 24.4: $G = S_3$, $\mathcal{U} = A_3$

$\Rightarrow\ A_3 = \{id, (123), (132)\} = id\circ A_3 = (123)\circ A_3$

$(12)\circ A_3 = \{(12), (12)(123), (12)(132)\} = \{(12), (23), (13)\}$

$\Rightarrow\ \cdot\ S_3 = A_3 \cup (12)\circ A_3 = id\circ A_3 \ \dot{\cup}\ (12)\circ A_3$

$\cdot\ S_3/A_3 = \{A_3, (12)\circ A_3\} = \{\overline{id}, \overline{(12)}\}$

Bem. 24.5: $\mathcal{U} \leq G \ \Rightarrow\ \cdot\ \bar{e} = e\cdot\mathcal{U} = \mathcal{U}$

d.h. $\mathcal{U}$ selbst ist immer eine Nebenklasse von $\mathcal{U}$

$\cdot\ \forall u\in\mathcal{U}:\ u\cdot\mathcal{U} = \{u\cdot v \mid v\in\mathcal{U}\} = \mathcal{U}$

Prop. 24.6: Sei $(G,\cdot) = (\mathbb{Z}, +)$, $\mathcal{U} = n\cdot\mathbb{Z}$ für ein $n \geq 1$.

Die Linksnebenklassen von $\mathcal{U}$ in G sind genau die folgende n Mengen:

$\bar{0} = 0 + n\mathbb{Z} = n\cdot\mathbb{Z} = \{n\cdot z \mid z\in\mathbb{Z}\}$

$\bar{1} = 1 + n\mathbb{Z} = \{1 + n\cdot z \mid z\in\mathbb{Z}\}$

$\bar{2} = 2 + n\mathbb{Z} = \{2 + n\cdot z \mid z\in\mathbb{Z}\} = \{z\in\mathbb{Z} \mid z$ hat den Rest 2 bei Division durch $n\}$

$\vdots \qquad\qquad \vdots$

$\overline{n-1} = (n-1) + n\mathbb{Z} = \{(n-1) + n\cdot z \mid z\in\mathbb{Z}\}$

Insbesondere: $|\mathbb{Z} : n\mathbb{Z}| = n$.

Beweis: ● Sei $m\in\mathbb{Z} \xRightarrow{D.m.R.} \exists q, r\in\mathbb{Z}:\ m = q\cdot n + r$ mit $0 \leq r < n$

$\Rightarrow (-r) + m = -r + nq + r = n\cdot q \in n\mathbb{Z} = \mathcal{U} \Rightarrow r \sim m \Rightarrow m \sim r \Rightarrow m \in \bar{r}$

● Ang: $\exists\ 0 \leq i < j \leq n-1$ mit $\bar{i} = \bar{j}$, d.h. $i \sim j \Rightarrow \underset{n-1 \,>\, j \,\geq\, j-i \,>\, 0}{\underset{\shortparallel}{-i+j}} \in \mathcal{U} = n\cdot\mathbb{Z}$ ↯

$\boxed{z}$

Notation 24.7

· $n \geq 1$: · Schreibe $\mathbb{Z}_n$ statt $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

· $\bar{a}$ schreibe auch $\bar{a}_n$

· Seien $x, y \in \mathbb{Z}$.

Schreibe: $x \equiv y \pmod{n}$ "x kongruent y modulo n"

$:\Longleftrightarrow \; n \mid x - y$

$\Longleftrightarrow$ x und y haben bez. D.m.R. durch n denselben Rest

Damit: $\bar{a}_n = \{ x \mid x \equiv a \pmod{n} \}$

B) Der Satz von Lagrange

Lemma 24.9

Sei G eine Gruppe, $\mathcal{U} \leq G$ und $g \in G$.

Dann: $L_g : \mathcal{U} \longrightarrow g \cdot \mathcal{U} : u \longmapsto g \cdot u$ ist bijektiv

Insbesondere: $|\mathcal{U}| = |g\mathcal{U}|$

Beweis:

Zeige: L_g ist injektiv

Seien $u, u' \in \mathcal{U}$ mit $\underset{\underset{g\cdot u}{\shortparallel}}{L_g(u)} = \underset{\underset{g\cdot u'}{\shortparallel}}{L_g(u')} \overset{KR}{\Longrightarrow} u = u' \Rightarrow L_g$ injektiv

Zeige: L_g ist surjektiv

Sei $x \in g \cdot \mathcal{U} \Rightarrow \exists u \in \mathcal{U}: x = g \cdot u \doteq L_g(u) \Rightarrow L_g$ ist surjektiv

$\Box$

Satz von Lagrange 24.10

Sei G eine endliche Gruppe und $\mathcal{U} \leq G$.

Dann: $|G| = |\mathcal{U}| \cdot |G : \mathcal{U}|$. Insbesondere: $|\mathcal{U}|$ und $|G:\mathcal{U}|$ teilen von $|G|$

Beweis: $\cdot \ |G| < \infty \ \Rightarrow \ \underset{k}{\underset{\shortparallel}{|G:\mathcal{U}|}} = |G/\mathcal{U}| < \infty$

$$\Rightarrow \ \exists\, g_1, \dots, g_k \in G: \quad G/\mathcal{U} = \{g_1\mathcal{U}, \dots, g_k\mathcal{U}\}$$

$$\Rightarrow \ G = g_1\mathcal{U} \,\dot\cup\, \dots \,\dot\cup\, g_k\mathcal{U}$$

$$\Rightarrow \ |G| = \underset{|\mathcal{U}|}{\underset{\shortparallel}{|g_1\mathcal{U}|}} + \dots + \underset{|\mathcal{U}|}{\underset{\shortparallel}{|g_k\mathcal{U}|}} \underset{24.9}{=} \underbrace{|\mathcal{U}| + \dots + |\mathcal{U}|}_{k\text{-mal}} = k \cdot |\mathcal{U}| = |G:\mathcal{U}| \cdot |\mathcal{U}|$$

$\square$

Korollar 24.11

Sei G eine Gruppe, $g \in G$. Setze: $o(g) := |\langle g \rangle|$ die Ordnung von g.

Wenn $|G| < \infty$, dann: $o(g) \mid |G|$.

Bem. 24.12:

Beachte: $\langle g \rangle = \{g^n \mid n \in \mathbb{Z}\} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Wenn } o(g) = m < \infty}}{=} \{\overset{\overset{e}{\shortparallel}}{g^0}, \overset{\overset{e}{\neq}}{g^1}, \dots, \overset{\overset{e}{\neq}}{g^{m-1}}\}$

$$\rightarrow \ o(g) = \inf\{k \geq 1 \mid g^k = e\} \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$$

Bsp. 24.13

- $\mathcal{S}_3 = \{id, (12), (23), (13), (123), (132)\}$, $\quad |\mathcal{S}_3| = 3! = 6$
- $\mathcal{U} \leq \mathcal{S}_3 \ \underset{\text{Lagrange}}{\Rightarrow} \ |\mathcal{U}| \in \{1, 2, 3, 6\}$
- $|\mathcal{U}| = 1$: $\Rightarrow \mathcal{U} = \{id\}$
- $|\mathcal{U}| = 6$: $\Rightarrow \mathcal{U} = \mathcal{S}_3$
- $|\mathcal{U}| = 2$: $\Rightarrow \exists\, id \neq \sigma \in \mathcal{U} \Rightarrow 1 \neq o(\sigma) \mid |\mathcal{U}| = 2$

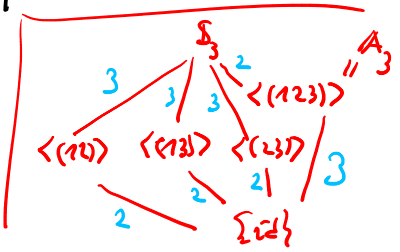
  $\Rightarrow o(\sigma) = 2 \Rightarrow \sigma^2 = id \Rightarrow \sigma \in \{(12), (23), (13)\}$

  $\Rightarrow \mathcal{U} = \underset{\langle(12)\rangle}{\underset{\shortparallel}{\{id, (12)\}}}$ oder $\mathcal{U} = \underset{\langle(13)\rangle}{\underset{\shortparallel}{\{id, (13)\}}}$ oder $\mathcal{U} = \underset{\langle(23)\rangle}{\underset{\shortparallel}{\{id, (23)\}}}$
- $|\mathcal{U}| = 3$: $\Rightarrow id \neq \sigma \in \mathcal{U} \Rightarrow 1 \neq o(\sigma) \mid |\mathcal{U}| = 3$

  $\Rightarrow o(\sigma) = 3 \rightarrow \sigma \in \{(123), (132)\}$

  $\Rightarrow \mathcal{U} = \langle \sigma \rangle = \{id, (123), (132)\}$

  $= \langle (123) \rangle$



c) Faktorgruppe

Satz 24.14 Sei $(G,\cdot)$ eine abelsche Gruppe, $U \leq G$.

Dann: · $\bar{g}\cdot\bar{h} = \overline{g\cdot h}$ $\forall g,h\in G$

· $(G/U,\cdot)$ ist eine abelsche Gruppe;
die sogenannte Faktorgruppe von G modulo U

· Zudem: · $\bar{e} = U$ ist das Neutrale in G/U

· $(\bar{g})^{-1} = \overline{g^{-1}}$ ist das Inverse zu $\bar{g}$ in G/U

· $\pi : G \longrightarrow G/U ; g \mapsto \bar{g}$ ist ein surjektiver Gruppenhomom.

Beweis: · $\bar{g}\cdot\bar{h} = g\cdot U\cdot h\cdot U \underset{G \text{ abelsch}}{\overset{!}{=}} g\cdot h\cdot \underbrace{U\cdot U}_{\overset{\shortparallel}{U}} = g\cdot h\cdot U = \overline{g\cdot h}$

"$\subseteq$" $\underset{\hat{U}}{u}\cdot\underset{\hat{U}}{v} \in U$

"$\supseteq$" $u\in U \Rightarrow u = \underset{\hat{U}}{e}\cdot\underset{\hat{U}}{u} \in U\cdot U$

· Zeige: $(G/U,\cdot)$ ist abelsche Gruppe.

· $(\bar{g}\cdot\bar{h})\cdot\bar{k} = \overline{g\cdot h}\cdot\bar{k} = \overline{(g\cdot h)\cdot k} = \overline{g\cdot(h\cdot k)} = \bar{g}\cdot(\bar{h}\cdot\bar{k})$

$\shortparallel$
$\bar{g}\cdot\overline{h\cdot k}$ //

· $\bar{e}\cdot\bar{g} = \overline{e\cdot g} = \bar{g} \Rightarrow \bar{e}$ ist ein Neutrales

· $\overline{g^{-1}}\cdot\bar{g} = \overline{g^{-1}\cdot g} = \bar{e} \Rightarrow \overline{g^{-1}}$ ist das Inverse zu $\bar{g}$

· $\bar{g}\cdot\bar{h} = \overline{g\cdot h} = \overline{h\cdot g} = \bar{h}\cdot\bar{g} \Rightarrow G$ abelsch!

· $\pi(g\cdot h) = \overline{g\cdot h} = \bar{g}\cdot\bar{h} = \pi(g)\cdot\pi(h) \Rightarrow \pi$ ist Homom. □

Bem. 24.15

Rechenregeln in G/U:

① $\bar{g}\cdot\bar{h} = \overline{g\cdot h}$

② $\bar{g}^{-1} = \overline{g^{-1}}$

③ $\bar{e} = \bar{u}$ $\forall u\in U$ ist das Neutrale in G/U

Kor. 24.16

Für $n \in \mathbb{Z}$ ist $(\mathbb{Z}_n, +)$ ist eine abelsche Gruppe,

wobei: $\overline{x} + \overline{y} = \overline{x+y}$

Bemerkung 24.17

① **Rechnen in $\mathbb{Z}_{12}$:** Wenn jetzt 9 Uhr ist, wie spät ist es in 5 Stunden?

$$\overline{9} + \overline{5} = \overline{9+6} = \overline{14} = \overline{2+1\cdot 12} = \overline{2} \in \mathbb{Z}_{12}$$

Also: 2 Uhr!

② **Rechnen in $\mathbb{Z}_{24}$:** Wenn jetzt 9 Uhr ist, wie spät war es vor 55 Stunden?

$$\overline{9} - \overline{55} = \overline{9-55} = \overline{-46} = \overline{2-2\cdot 24} = \overline{2} \in \mathbb{Z}_{24}$$

Also: 2 Uhr

③ **Rechnen in $\mathbb{Z}_7$:** Montag = 1, Dienstag = 2, ..., Sonntag = 7

Wenn heute Montag ist, welcher Wochentag ist in 51 Tagen?

$$\overline{1} + \overline{51} = \overline{1+51} = \overline{52} = \overline{3+7\cdot 7} = \overline{3} \in \mathbb{Z}_7$$

Also: Mittwoch

Beispiel 24.18 Wenn G nur wenige Elemente hat, kann man die Operation $\cdot$ in einer Gruppentabelle festhalten!

z.B.: Rechnen in $\mathbb{Z}_n$ mit $n = 2, 3, 4$

$+$	$\overline{0}$	$\overline{1}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{0}$

$+$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{0}$
$\overline{2}$	$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$

$+$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{0}$
$\overline{2}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$
$\overline{3}$	$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$

§ 25 Ringe und Körper

A) Ringe

Definition 25.1

ⓐ Ein Ring mit Eins ist eine nicht-leere Menge R mit zwei 2-stelligen Operationen $+ : R \times R \longrightarrow R$ und $\cdot : R \times R \longrightarrow R$, so dass folgende Axiome gelten:

① $(R,+)$ ist eine abelsche Gruppe mit Neutralem 0.

② $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) \quad \forall a,b,c \in R$

③ $\exists\, 1 \in R : \forall a \in R : \quad 1 \cdot a = a \cdot 1 = a$

④ $\forall a,b,c \in R: \quad a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$ und $(b+c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a$ } Distributivgesetze

ⓑ Ein Ring mit Eins heißt kommutativ, wenn: $\forall a,b \in R: \quad a \cdot b = b \cdot a$

ⓒ Sei $(R,+,\cdot)$ ein Ring mit Eins und $a \in R$.
Dann: · a heißt Einheit in R $:\Longleftrightarrow \exists\, a^{-1} \in R: \; a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$

· $R^* := \{ a \in R \mid a$ ist Einheit$\}$

Bsp. 25.3

ⓐ $(\mathbb{Z},+,\cdot)$ ist kommutativer Ring mit 1.
Es gilt: $\mathbb{Z}^* = \{1, -1\}$

ⓑ Sei M eine beliebige Menge und $(R,+,\cdot)$ ein Ring mit Eins.
Setze: · $R^M := \{ f : M \longrightarrow R \mid f$ ist Abbildung$\}$

· $f+g : M \longrightarrow R$ mit $(f+g)(m) = f(m) + g(m) \quad \forall m \in M$

· $f \cdot g : M \longrightarrow R$ mit $(f \cdot g)(m) = f(m) \cdot g(m) \quad \forall m \in M$

Dann ist $(R^M, +, \cdot)$ ein Ring mit Eins, wobei:

· $0 : M \longrightarrow R : m \longmapsto 0$ ist das Neutrale bzg. der Addition

· $1 : M \longrightarrow R : m \longmapsto 1$ ist " " " " Multipl.

ⓒ · $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{R}) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| \ a,b,c,d \in \mathbb{R} \right\}$

· $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a+a' & b+b' \\ c+c' & d+d' \end{pmatrix}$

· $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a\cdot a'+b\cdot c' & a\cdot b'+b\cdot d' \\ c\cdot a'+d\cdot c' & c\cdot b'+d\cdot d' \end{pmatrix}$

Dann: $(\mathrm{Mat}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ ist ein Ring mit Eins, nicht kommutativ

mit · $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ als Neutralem bzgl. $+$

· $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ " " " $\cdot$

B) Rechenregeln in Ringen

Lemma 25.4

Sei R ein Ring mit Eins, dann gelten die üblichen Rechenregeln.

Insbesondere:

Wenn $1_R = 0_R$, dann gilt $R = \{0_R\}$

Beweis:

Sei $a \in R \Rightarrow a = 1_R \cdot a = 0_R \cdot a = 0_R \Rightarrow R = \{0_R\}$. ∎

Def. & Prop. 25.5:

Sei R ein Ring mit Eins und S eine Teilmenge von R.

Dann heißt S ein Unterring oder Teilring von R

$:\Longleftrightarrow$ ① $1_R \in S$ ② $a+b \in S \ \forall a,b \in S$

③ $-a \in S \ \forall a \in S$ ④ $a \cdot b \in S \ \forall a,b \in S$

Ein Unterring ist bzgl. $+$ und $\cdot$ immer selbst ein Ring.

Bsp. 25.6:

Offenbar: $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ ist kommutativer Ring mit Eins.

Setze: $\mathbb{Z}[i] := \{a + b \cdot i \mid a,b \in \mathbb{Z}\}$ ist ein Unterring von $\mathbb{C}$,

also selbst ein kommutativer Ring mit Eins (ganze Gaußsche Zahlen).

Denn: ① $1 + 0 \cdot i \in \mathbb{Z}[i]$ ③ $a + b\cdot i \in \mathbb{Z}[i] \Rightarrow -(a+b\cdot i) = (-a) + (-b)\cdot i \in \mathbb{Z}[i]$

② & ④ Seien $(a+b\cdot i), (c+d\cdot i) \in \mathbb{Z}[i] \Rightarrow (a+bi)+(c+d\cdot i) = (a+c)+(b+d)\cdot i \in \mathbb{Z}[i]$

und $(a+bi)\cdot(c+d\cdot i) = (a\cdot c - b\cdot d) + (a\cdot d + b\cdot c)\cdot i \in \mathbb{Z}[i]$. ∎

C) Körper

Def. 25.7: Ein kommutativer Ring mit Eins $(R,+,\cdot)$ heißt ein Körper, wenn $R^* = R \setminus \{0\}$.

Bemerkung 25.8:
Sei K eine nicht-leere Menge und $+: K \times K \to K$, $\cdot: K \times K \to K$.
Dann: $(K,+,\cdot)$ ist ein Körper
$\Leftrightarrow$ ① $(K,+)$ ist eine abelsche Gruppe
② $(K \setminus \{0\}, \cdot)$ ist " abelsche Gruppe
③ Distributivgesetze gelten.

Bsp. 25.9:
- $(\mathbb{Q},+,\cdot)$, $(\mathbb{R},+,\cdot)$, $(\mathbb{C},+,\cdot)$ sind Körper
- $(\mathbb{Z},+,\cdot)$ ist kein Körper!

Lemma 25.10
Wenn $(K,+,\cdot)$ ein Körper ist und $a,b \in K \setminus \{0\}$,
dann gilt: $a \cdot b \neq 0$.

Beweis:
$K \setminus \{0\}$ ist Gruppe bzgl. $\cdot$ $\Rightarrow$ $K \setminus \{0\}$ ist bzgl. $\cdot$ abgeschlossen,
d.h. wenn $a,b \in K \setminus \{0\}$, dann $a \cdot b \in K \setminus \{0\}$. B

D) Der Ring $\mathbb{Z}_n$

Satz 25.11
Die Menge $\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \ldots, \overline{n-1}\}$ ist mit der Addition $\bar{a} + \bar{b} = \overline{a+b}$ und der Multiplikation $\bar{a} \cdot \bar{b} = \overline{ab}$ ein kommutativer Ring mit Eins $\bar{1}$.

Beweis: 24.6 $\Rightarrow (\mathbb{Z}_n, +)$ ist eine abelsche Gruppe

- Zeige: $\cdot$ ist wohldefiniert, d.h. die Definition hängt nicht von den gewählten Vertretern a und b ab.

Seien $\bar{a} = \bar{c}$ und $\bar{b} = \bar{d}$

$$\Rightarrow \exists x \in \mathbb{Z} : \quad a = c + x \cdot n$$

$$\exists y \in \mathbb{Z} : \quad b = d + y \cdot n$$

$$\Rightarrow a \cdot b = (c + xn) \cdot (d + yn) = c \cdot d + c \cdot y \cdot n + d \cdot x \cdot n + x \cdot n \cdot y \cdot n$$

$$= c \cdot d + (cy + dx + xyn) \cdot n$$

$$\Rightarrow \overline{a \cdot b} = \overline{c \cdot d}$$

$\Rightarrow \cdot$ ist wohldefiniert

Der Rest folgt aus $\mathbb{Z}$.

$\square$

<u>Bsp. 25.12:</u>

$\underset{\neq \bar{0}}{\bar{3}}, \underset{\neq \bar{0}}{\bar{2}} \in \mathbb{Z}_6 \quad \Rightarrow \quad \underset{\neq \bar{0}}{\bar{3}} \cdot \underset{\neq \bar{0}}{\bar{2}} = \overline{3 \cdot 2} = \bar{6} = \bar{0} \in \mathbb{Z}_6$

$\Rightarrow \mathbb{Z}_6$ ist kein Körper

<u>Korollar 25.13</u>

$\mathbb{Z}_n$ ist ein Körper $\Leftrightarrow$ n ist Primzahl

<u>Beweis:</u>

„$\Rightarrow$" Sei n keine Primzahl $\Rightarrow n = a \cdot b$ mit $1 < a, b < n$

$\Rightarrow \bar{a}, \bar{b} \neq \bar{0}$ und $\bar{a} \cdot \bar{b} = \overline{a \cdot b} = \bar{n} = \bar{0}$

$\Rightarrow \mathbb{Z}_n$ ist kein Körper.

„$\Leftarrow$" Sei n eine Primzahl und $\overset{\cancel{\bar{0}}}{\bar{a} \in \mathbb{Z}_n}$, $0 < a \leq n-1$

<u>zu zeigen:</u> $\bar{a}$ hat ein multiplikatives Inverses

Definition: $\alpha : \mathbb{Z}_n \longrightarrow \mathbb{Z}_n ; \; \bar{x} \longmapsto \bar{a} \cdot \bar{x} = \overline{a \cdot x}$

Ang.: $\exists \; \bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{Z}_n$ mit $0 \leq y < x \leq n-1$ und $\alpha(\bar{x}) = \alpha(\bar{y})$

$\Rightarrow \quad \overline{a \cdot x} = \overline{a \cdot y} \quad \Rightarrow \quad n$ teilt $a \cdot x - a \cdot y$

$$= a \cdot (x-y)$$

$\Rightarrow$ die Primzahl n kommt in der Primfaktorzerlegung von $\underbrace{a}_{0 < \cdot \leq n-1} \cdot \underbrace{(x-y)}_{0 < \cdot \leq n-1}$ vor ↯

wird nicht von n geteilt

Also: α ist injektiv

$\underset{\uparrow}{\Rightarrow}$ α ist surjektiv $\Rightarrow \exists \, \bar{x} : \alpha(\bar{x}) = \bar{1}$

wie $\mathbb{Z}_n$ endlich + 5.6

$$\alpha(\bar{x}) = \bar{a} \cdot \bar{x} = \bar{x} \cdot \bar{a}$$

$$\Downarrow$$

$$\bar{x} = \bar{a}^{-1}$$

□

Beispiel 25.14

- $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\} \xrightarrow{\cong} \mathbb{Z}_2 = \{\bar{0}, \bar{1}\}$

$$0 \longmapsto \bar{0}$$

$$1 \longmapsto \bar{1}$$

- $\underset{\text{Primzahl}}{\mathbb{F}_p} = \{0, 1, \ldots, p-1\} \xrightarrow{\cong} \mathbb{Z}_p = \{\bar{0}, \ldots, \overline{p-1}\}$

$$a \longmapsto \bar{a}$$

Beispiel 25.6 (D):

Sei R ein kommutativer Ring mit Eins.

Dann heißt ein formaler Ausdruck der Form:

$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot t^k$ mit $a_k \in R$ und t eine Veränderliche

eine formale Potenzreihe mit Koeffizienten a_k

in R.

Setze: · $R[[t]] := \{ \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot t^k \mid a_k \in R \}$ = Menge aller Potenzreihen über R

· $$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot t^k + \sum_{k=0}^{\infty} b_k \cdot t^k := \sum_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k) \cdot t^k$$

· $$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot t^k \cdot \sum_{l=0}^{\infty} b_l \cdot t^l := \left(\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} a_k \cdot b_l \cdot t^{k+l} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\underset{\underset{\sum_{k=0}^{n} a_k \cdot b_{n-k}}{\parallel}}{\sum_{k+l=n} a_k \cdot b_l} \right) \cdot t^n$$

· $$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot t^k = \sum_{k=0}^{\infty} b_k \cdot t^k \iff a_k = b_k \quad \forall k = 0, \dots, \infty$$

Damit: $(R[[t]], +, \cdot)$ ist ein kommutativer Ring mit $1_{R[[t]]} = t^0$

Kurznotation: Wenn $a_k = 0$ für alle $k \geq n+1$ dann schreibe $\sum_{k=0}^{n} a_k \cdot t^k$ statt $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot t^k$

§ 26 Der Polynomring $K[t]$

In diesem Abschnitt sei K stets ein Körper.

A) Grundlegende Eigenschaften von $K[t]$

Def. 26.1

Eine formale Potenzreihe der Form $\sum_{k=0}^{n} a_k \cdot t^k \in K[[t]]$ heißt ein Polynom mit Koeffizienten in K in der Veränderlichen t.

Die Menge aller solcher Polynome

$$K[t] := \{ \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot t^k \mid a_k \in K, \ n \in \mathbb{N} \}$$

heißt der Polynomring über K in t.

Bem. 26.2 Die Addition und Multiplikation an $K[[t]]$ liefert für Polynome $\sum_{k=0}^{n} a_k \cdot t^k$ und $\sum_{k=0}^{m} b_k \cdot t^k$:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \cdot t^k + \sum_{k=0}^{m} b_k \cdot t^k = \sum_{k=0}^{\max\{m,n\}} (a_k + b_k) \cdot t^k$$

$a_k = 0 \ \forall k > n$
$b_k = 0 \ \forall k > m$

$a_n \cdot b_m$ // $i = m+n$

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \cdot t^k \cdot \sum_{l=0}^{m} b_l \cdot t^l = \sum_{i=0}^{n+m} \left(\sum_{k+l=i} (a_k \cdot b_l) \right) \cdot t^i$$

$$= \sum_{i=0}^{n+m} \left(\sum_{k=0}^{i} a_k \cdot b_{i-k} \right) \cdot t^i$$

Prop. 26.3
$K[t]$ ist ein Unterring von $K[[t]]$, insbesondere ist $K[t]$ ein kommutativer Ring mit Eins $1 = t^0$.

Bemerkung 26.4
Schreibe $3t^2 + 2t + 5$ statt $3t^2 + 2t^1 + 5t^0$.

Def. 26.5
Sei $f = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot t^k$ mit $a_n \neq 0$, dann heißt $\deg(f) := n$ der Grad von f und $lc(f) := a_n$ der Leitkoeffizient von f.

Setze: $\deg(0) := -\infty$ und $lc(0) := 0$.

Wenn $lc(f) = 1$, heißt f normiert.

Bem. 26.6: $\deg(f) \leq 0 \iff f$ ist ein konstantes Polynom $= a_0 \cdot t^0$ für ein $a_0 \in K$

Lemma 26.7: (Gradformeln)
Sei $f, g \in K[t] \setminus \{0\}$
Dann:
$$\deg(f+g) \leq \max\{\deg(f), \deg(g)\}$$
$$\deg(f \cdot g) = \deg(f) + \deg(g)$$

Bsp. 26.8:

$f = 2t + 1, \quad g = -2t+1 \in \mathbb{Q}[t]$

$\Rightarrow \quad f+g = 2, \quad \deg(f+g) = 0 < 1 = \max\{\deg(f), \deg(g)\}$

$f \cdot g = (2t+1)\cdot(-2t+1) = -4t^2+1, \quad \deg(f \cdot g) = 2$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \shortparallel$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \deg(f) + \deg(g)$

B) Nullstellen und Division mit Rest

Def. 26.9: Sei $f = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot t^k \in K[t]$ und $\lambda \in K$.

Setze: $f(\lambda) := \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot \lambda^k \in K$

Dann heißt λ Nullstelle von f, wenn $f(\lambda) = 0$.

Bsp. 26.10:

$f = t^4 - 4 = t^4 - 4 \cdot t^0 \in \mathbb{R}[t], \quad \lambda = \sqrt{2} \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \quad f(\lambda) = (\sqrt{2})^4 - 4 = 4 - 4 = 0$

$\Rightarrow \quad \sqrt{2}$ ist Nullstelle von f

Def. 26.11:

Eine nicht-leere Teilmenge I von $K[t]$ heißt ein Ideal von $K[t]$, wenn:

① $\forall\, f, g \in I: \quad f + g \in I$

② $\forall\, f \in I,\ h \in K[t]: \quad h \cdot f \in I$

Bsp. 26.12:

$I := \{ f \in \mathbb{R}[t] \mid f(1) = 0 \}$ ist ein Ideal in $\mathbb{R}[t]$

Denn: Seien $f, g \in I, \quad h \in \mathbb{R}[t]$

$\Rightarrow \quad (f+g)(1) = f(1) + g(1) = 0 + 0 = 0 \Rightarrow f+g \in I$

$\qquad (h \cdot f)(1) = h(1) \cdot f(1) = h(1) \cdot 0 = 0 \Rightarrow h \cdot f \in I$

$\square$

Satz 26.13

Seien $f, g \in K[t] \setminus \{0\}$ und $I \subseteq K[t]$ ein Ideal.

ⓐ DmR: $\exists_1\, q, r \in K[t] : \quad f = q \cdot g + r$ mit $\deg(r) < \deg(g)$

ⓑ Wenn λ eine Nullstelle von f ist, dann:

$$\exists\, q \in K[t] : \quad f = q \cdot (t - \lambda)$$

"Wir können den Linearfaktor $t - \lambda$ abspalten."

ⓒ $\deg(f) = n \quad \Longrightarrow \quad \#$ Nullstellen von $f \leq n$

ⓓ $\exists_1\, \mu \in K[t]$ normiert mit $I = \{ g \cdot \mu \mid g \in K[t] \}$

Beweis: ⓐ siehe Skript.

ⓑ Teile f durch $t - \lambda$ mit Rest:

$\underset{ⓐ}{\Longrightarrow} \quad \exists\, q, r : \quad f = q \cdot (t - \lambda) + r \quad$ mit $\deg(r) < \deg(t - \lambda) = 1$

$\Longrightarrow \quad \deg(r) \in \{0, -\infty\} \quad \Longrightarrow \quad r \in K$

$\Longrightarrow \quad 0 = f(\lambda) = q(\lambda) \cdot \underbrace{(\lambda - \lambda)}_{=0} + r = r \quad \Longrightarrow \quad f = q \cdot (t - \lambda)$

ⓒ Ind. nach n:

$n = 0$: $\quad f$ konstant und $f \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad f$ hat keine Nst.

$n-1 \mapsto n$: 1. Fall: f hat keine Nst. $\Longrightarrow$ ✓

2. Fall: f hat eine Nst. $\lambda \quad \Longrightarrow \quad \exists\, q : \; f = q \cdot (t - \lambda)$

Jede Nst. von f ist Nst. von q oder von $t - \lambda$

$\underset{\deg(q) = n-1}{\Longrightarrow} \quad \#$ Nst. von $f \leq 1 + \#$ Nst. von $q \underset{\text{Ind.}}{\overset{\Uparrow}{\leq}} 1 + n - 1 = n$

ⓓ 1. Fall: $I = \{0\} \quad \Longrightarrow \quad$ Wähle $\mu = 0$

2. Fall: $I \neq \{0\}$

Wähle $\mu \in I \setminus \{0\}$ von minimalem Grad und normiert

Zeige: $I = \{ g \cdot \mu \mid g \in K[t] \}$

Sei $f \in I \quad \underset{\text{D.m.R.}}{\Longrightarrow} \quad \exists\, q, r : \quad f = q \cdot \mu + r$ mit $\deg(r) < \deg(\mu)$

$\Longrightarrow \quad r = \underset{\overset{\cap}{I}}{f} - q \cdot \underset{\overset{\cap}{I}}{\mu} \in I \quad \underset{\deg(\mu)\text{ minimal}}{\overset{}{\Longrightarrow}} \quad r = 0 \quad \Longrightarrow \quad f = q \cdot \mu.$

□

Bsp. 26.14:

ⓐ Teile $f = t^3 - 1$ durch $g = t^2 + t$ mit Rest

$$
\begin{array}{rl}
(t^3 \qquad -1) : (t^2 + t) = & \underbrace{t - 1}_{= q} \\
-(t^3 + t^2) & \\
-t^2 \qquad -1 & \\
-(-t^2 - t) & \\
t \quad -1 & =: r
\end{array}
$$

Also: $f = \underbrace{(t-1)}_{= q} \cdot g + \underbrace{(t-1)}_{= r}$

ⓑ $f = t^3 - 1 \in \mathbb{R}[t] \Rightarrow f(1) = 1^3 - 1 = 0$

$\Rightarrow \exists\, q : f = q \cdot (t-1)$

Berechne q:

$$
\begin{array}{rl}
(t^3 - 1) : (t - 1) = & \underbrace{t^2 + t + 1}_{= q} \\
-(t^3 - t^2) & \\
t^2 \quad -1 & \\
-(t^2 - t) & \\
t \quad -1 & \\
t \quad -1 & \\
- &
\end{array}
$$

Bem. 26.15

ⓐ Ein Polynom $f \in K[t]$ definiert eine Polynomfunktion:

$$K \longrightarrow K ; \lambda \longmapsto f(\lambda)$$

d.h. $\varphi : K[t] \longrightarrow K^K : f \mapsto (K \to K : \lambda \mapsto f(\lambda))$

ⓑ $K = \mathbb{Z}_2 = \{\bar{0}, \bar{1}\}$: $t^2 + t = f \in \mathbb{Z}_2[t]$

$$\left.\begin{array}{l}
\mathbb{Z}_2 \longrightarrow \mathbb{Z}_2 ; \bar{\lambda} \longmapsto f(\bar{\lambda}) \\
\bar{0} \longmapsto \bar{0}^2 + \bar{0} = \bar{0} \\
\bar{1} \longmapsto \bar{1}^2 + \bar{1} = \bar{1} + \bar{1} = \bar{0}
\end{array}\right\} \text{ ist die Nullfunktion!}$$

$\Rightarrow$ die Polynomfkt zu f stimmt mit der des Nullpolynoms überein!
d.h. Die Polynomfkt. legt das Polynom nicht fest.

ⓒ Beachte: $\# K = \infty$, dann passiert das nicht?

C) Fundamentalsatz der Algebra

Def. 26.16

ⓐ Sei $\lambda \in K$ und $f = (t-\lambda)^m \cdot g$ mit $m \geq 1$ und $g(\lambda) \neq 0$.
Dann heißt λ eine Nullstelle mit Vielfachheit m von f.

ⓑ Sei $K \subseteq L$ ein Teilkörper von L und $f \in K[t]$, $\deg(f) = n > 0$.
Wenn es $b_1, \dots, b_n \in L$ und $0 \neq \underset{lc(f)}{\underset{\shortparallel}{c}} \in K$ mit $f = c \cdot (t-b_1) \cdots (t-b_n)$,

dann sagen wir f zerfällt über L in Linearfaktoren.

ⓒ Ein Körper K heißt algebraisch abgeschlossen, wenn jedes Polynom $f \in K[t] \setminus K$ über K in Linearfaktoren zerfällt.

Bsp. 26.17:

$f = t^4 - 2t^3 + 2t^2 - 2t + 1 = (t-1)^2 \cdot (t^2+1) \in \mathbb{R}[t]$

$\Rightarrow$ • $\lambda = 1$ ist eine Nullstelle von Vielfachheit 2 von f,
weil $1^2 + 1 \neq 0$

• f zerfällt über $\mathbb{R}$ nicht in Linearfaktoren,
wohl aber über $\mathbb{C}$: $f = (t-1) \cdot (t-1) \cdot (t-i) \cdot (t+i)$

Fundamentalsatz der Algebra 26.18

ⓐ $\mathbb{C}$ ist algebraisch abgeschlossen.

ⓑ Jeder Körper K ist in einem algebraisch abgeschlossenen Körper enthalten. Der kleinste solche Körper heißt der algebraische Abschluss $\bar{K}$ von K.

D) Irreduzible Polynome

Def. 26.19: Ein nicht-konstantes Polynom $f \in K[t] \setminus K$ heißt irreduzibel, wenn aus $f = g \cdot h$ stets $\deg(g) = 0$ oder $\deg(h) = 0$ folgt.

Bsp. 26.20:

ⓐ $f = t^2 + 1 \in \mathbb{R}[t]$ und $f = g \cdot h$ mit $\deg(g), \deg(h) \neq 0$

$\Rightarrow 2 = \deg(f) = \underset{\overset{\vee}{0}}{\deg(g)} + \underset{\overset{\vee}{0}}{\deg(h)} \Rightarrow \deg(g) = 1 \Rightarrow g = a \cdot t + b, \ a \neq 0$

$\Rightarrow g(-\frac{b}{a}) = -\frac{b}{a} \cdot a + b = 0 \Rightarrow \underset{\frac{b^2}{a^2}+1>0}{f(-\frac{b}{a}) = 0}$ ↯

Also: f ist irreduzibel !

ⓑ $\deg(f) = 1 \Longrightarrow f$ ist irreduzibel

Satz über die Primfaktorzerlegung in $K[t]$ 26.21

Jedes nicht-konstante normierte Polynom in $K[t]$ lässt sich auf eindeutige Weise als Produkt von normierten irreduziblen Polynomen schreiben!

Bsp. 26.22

$$f = (t-1)\cdot(t-1)\cdot(t^2+1) \quad = \text{PFZ in } \mathbb{R}[t]$$
$$= (t-1)\cdot(t-1)\cdot(t-i)\cdot(t+i) \quad = \text{PFZ in } \mathbb{C}[t]$$

Satz von der Bezout-Identität 26.23

Seien $f, g \in K[t]$ zwei normierte teilerfremde Polynome, d.h. sie haben keinen Primfaktor gemeinsam, dann:

$$\exists\, p, q \in K[t]: \quad 1 = p\cdot f + q\cdot g .$$

Beweis für $g = t-\lambda$:

D.m.R. $\Rightarrow \exists\, q, r: \quad f = q\cdot(t-\lambda) + r$, mit $\deg(r) < \overset{\overset{1}{\shortparallel}}{\deg(t-\lambda)}$

$\Rightarrow r \in K$ ist konstant

Ang.: $r = 0 \Rightarrow f = q\cdot(t-\lambda) = q\cdot g$

$\Rightarrow f$ und g haben Primteiler $t-\lambda$ gemeinsam ↯

Also: $r \neq 0 \Longrightarrow \frac{1}{r}\cdot f = \frac{q}{r}\cdot(t-\lambda) + \underbrace{\frac{r}{r}}_{\overset{\shortparallel}{1}}$

$$\Longrightarrow 1 = \underset{\overset{\shortparallel}{p}}{\frac{1}{r}}\cdot f + \underbrace{\left(-\frac{q}{r}\right)}_{\text{oben } q}\cdot g \qquad \square$$

Bem 26.24

$$K(t) := \left\{ \frac{f}{g} \,\middle|\, f,g \in K[t],\ g \neq 0 \right\}$$

= Körper der rationalen Funktionen über K

Termin für die Nachklausur

4. 10. , $8^{\underline{30}} - 10^{\underline{30}}$ Uhr

KAPITEL IV: Vektorräume und Lineare Abbildungen

GV: K sei ab jetzt stets ein Körper.

§27 Rechnen mit Matrizen

A) Grundlegende Begriffe und Operationen

Def. 27.1 Seien $m, n \in \mathbb{N}$, $m, n \geq 1$.

(a) Eine $m \times n$-Matrix über K ist ein Schema der Form

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

mit $a_{ij} \in K$ für $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$

Schreibe kurz: $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}} = (a_{ij})$

(b) $\mathrm{Mat}(m \times n, K) := \{ (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}} \mid a_{ij} \in K \}$ = Menge aller $m \times n$-Matrizen über K

$\mathrm{Mat}_n(K) := \mathrm{Mat}(n, K) := \mathrm{Mat}(n \times n, K)$ = Menge aller quadratischen $n \times n$-Matrizen über K

(c) Sei $A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}(m \times n, K)$.

Dann heißt $a_i = (a_{i1} \; \cdots \; a_{in}) \in \mathrm{Mat}(1 \times n, K)$ i-te Zeile von A

und $a^j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(m \times 1, K)$ j-te Spalte von A.

(d) Sei $A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}(m \times n, K)$.

Setze: $A^t = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(n \times m, K) =: (a'_{ij})_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,m}}$

A^t heißt die Transponierte von A.

$$\Downarrow$$
$$\boxed{a'_{ij} = a_{ji}}$$

(e) $K^n := \mathrm{Mat}(n \times 1, K) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \middle| \; x_i \in K \right\}$

- Vektor oder Punkt in K^n
- x_i = i-te Komponente von $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

Def. 27.2

ⓒ Seien $A=(a_{ij}),\ B=(b_{ij}) \in Mat(m\times n, K)$ und $\lambda \in K$.

Dann: • $A+B := (a_{ij}+b_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1}+b_{m1} & \cdots & & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$

• $\underset{\underset{\lambda A}{\parallel}}{\lambda\cdot A} := (\lambda\cdot a_{ij}) = \begin{pmatrix} \lambda\cdot a_{11} & \cdots & \lambda\cdot a_{1n} \\ \vdots & & \\ \lambda\cdot a_{m1} & \cdots & \lambda\cdot a_{mn} \end{pmatrix}$

ⓑ Sei $A=(a_{ij}) \in Mat(m\times n, K)$ und $B=(b_{jk}) \in Mat(n\times p, K)$

Definiere: $\underset{\underset{AB}{\parallel}}{A\circ B} := (c_{ik})_{\substack{i=1,\dots,m\\ k=1,\dots,p}} \in Mat(m\times p, K)$

wobei $c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\cdot b_{jk}$

Bsp. 27.3:

ⓐ $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in Mat(2\times 3, \mathbb{R}) \ni B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ • $A+B = \begin{pmatrix} 1+3 & 0+2 & 2+1 \\ 3+0 & 1+4 & 2+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$

• $(-2)\cdot A = \begin{pmatrix} (-2)\cdot 1 & (-2)\cdot 0 & (-2)\cdot 2 \\ (-2)\cdot 3 & (-2)\cdot 1 & (-2)\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -4 \\ -6 & -2 & -4 \end{pmatrix}$

ⓑ $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \in Mat(2\times 3, \mathbb{R})$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \in Mat(3\times 2, \mathbb{R})$

$\Rightarrow A\circ B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 2+2\cdot 0+3\cdot 2 & 1\cdot 1+2\cdot 1+3\cdot 0 \\ 4\cdot 2+5\cdot 0+6\cdot 2 & 4\cdot 1+5\cdot 1+6\cdot 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 20 & 9 \end{pmatrix} \in Mat(2\times 2, \mathbb{R})$$

$B\circ A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 1+1\cdot 4 & 9 & 12 \\ 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} \in Mat(3\times 3, \mathbb{R})$

$X = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ · $A \circ X = \begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\cdot1+2\cdot2+3\cdot3\\4\cdot1+5\cdot2+6\cdot3\end{pmatrix} = \underset{\substack{\cap\\ \mathrm{Mat}(2\times1,K)}}{\begin{pmatrix}14\\32\end{pmatrix}}$

· $X \circ A = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}$ geht nicht ?!

B) Die Abbildung zu einer Matrix

Def. 27.5 Sei $A \in \mathrm{Mat}(m \times n, K)$.

Dann: $f_A : K^n \longrightarrow K^m : x \longmapsto A \circ x$

ist die zu A assoziierte Abbildung.

Bsp. 27.6

$A = \begin{pmatrix}1&2\\0&3\end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(2\times2,\mathbb{R})$

$\Rightarrow$ $f_A : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix}1&2\\0&3\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_1+2\cdot x_2\\3\cdot x_2\end{pmatrix}$

Bem. 27.7

Nenne: · $\delta_{ij} := \begin{cases}0, & i\neq j\\1, & i=j\end{cases}$ Kronecker-Symbol

· $e_i := \begin{pmatrix}0\\\vdots\\0\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix} \in K^n$ ← i-te Zeile, $i \in \{1,\dots,n\}$ $= (\delta_{ji})_{j=1,\dots,n}$

i-ter Einheitsvektor in K^n

$\Rightarrow$ $f_A(e_i) = A \circ e_i \underset{\substack{\wr\\ A=(a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m\\ j=1,\dots,n}}}}{=} \begin{pmatrix}\sum\limits_{j=1}^{n} a_{1j}\cdot\delta_{ji}\\ \vdots \\ \sum\limits_{j=1}^{n} a_{mj}\cdot\delta_{ji}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_{1i}\\\vdots\\a_{mi}\end{pmatrix} = a^i$ = i-te Spalte von A

$\Rightarrow$ A ist durch f_A eindeutig festgelegt!!!

c) Rechenregeln für Matrizen

Lemma 27.8

Seien $x, y \in K^n$, $A, B \in \mathrm{Mat}(m \times n, K)$, $C \in \mathrm{Mat}(n \times p, K)$, $\lambda \in K$.

ⓐ $A \circ (x+y) = A \circ x + A \circ y$ und $\lambda \cdot (A \circ x) = A \circ (\lambda \cdot x)$

ⓑ $\lambda \cdot (A \circ C) = (\lambda \cdot A) \circ C = A \circ (\lambda \cdot C)$

ⓒ $f_{A+B} = f_A + f_B$

ⓓ $f_{\lambda A} = \lambda \cdot f_A$

Beweis: nachrechnen! $\square$

Satz 27.9

Seien $A \in \mathrm{Mat}(m \times n, K)$ und $B \in \mathrm{Mat}(n \times p, K)$.

Dann:

$$\underbrace{f_{A \circ B}}_{K^p \to K^m} = \underbrace{f_A}_{K^n \to K^m} \circ \underbrace{f_B}_{K^p \to K^n}$$

Beweis:

z.z.: $\forall x \in K^p$: $f_{A \circ B}(x) = (f_A \circ f_B)(x)$

$$f_{A \circ B}(x) = (A \circ B) \circ x \qquad (f_A \circ f_B)(x) = f_A(f_B(x)) = f_A(B \circ x) = A \circ (B \circ x)$$

$$\cdot\ (A \circ B) \circ x = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot b_{jk} \right)_{\substack{i=1,\dots,m \\ k=1,\dots,p}} \circ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \left(\sum_{k=1}^{p} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot b_{jk} \cdot x_k \right)_{i=1,\dots,n}$$

$$\cdot\ A \circ (B \circ x) = A \circ \left(\sum_{k=1}^{p} b_{jk} \cdot x_k \right)_{j=1,\dots,n} = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot \sum_{k=1}^{p} b_{jk} \cdot x_k \right)_{i=1,\dots,m}$$

$$= \left(\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{p} a_{ij}\, b_{jk} \cdot x_k \right)_{i=1,\dots,m}$$

$\square$

Kor. 27.10

Seien $A \in \mathrm{Mat}(m\times n, K)$, $B \in \mathrm{Mat}(n\times p, K)$, $C \in \mathrm{Mat}(p\times q, K)$.

Dann: $A\circ(B\circ C) = (A\circ B)\circ C$

Beweis:

$$f_{A\circ(B\circ C)} \overset{27.9}{=} f_A\circ\left(f_{B\circ C}\right) \overset{27.9}{=} f_A\circ\left(f_B\circ f_C\right)$$

$$\shortparallel$$

$$f_{(A\circ B)\circ C} \underset{27.9}{=} f_{A\circ B}\circ f_C \underset{27.9}{=} \left(f_A\circ f_B\right)\circ f_C$$

$$\xRightarrow[27.7]{?} \quad \begin{matrix}(A\circ B)\circ C\\ \shortparallel \\ A\circ(B\circ C)\end{matrix}$$

∎

Lemma 27.11

Seien $A, B \in \mathrm{Mat}(m\times n, K)$ und $C, D \in \mathrm{Mat}(n\times p, K)$.

Dann: $A\circ(C+D) = A\circ C + A\circ D$

$(A+B)\circ C = A\circ C + B\circ C$

Beweis: Wie 27.10. ∎

D) Invertierbare Matrizen

Def. 27.12:

Eine Matrix $A \in \mathrm{Mat}_n(K)$ heißt invertierbar,

wenn: $\exists\, A^{-1} \in \mathrm{Mat}_n(K): \; A^{-1}\circ A = A\circ A^{-1} = \begin{pmatrix}1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & 1\end{pmatrix}$

A^{-1}: heißt die Inverse von A

$$\mathbb{1}_n := \left(\delta_{ij}\right)_{\substack{i=1,\dots,n\\ j=1,\dots,n}}$$

$\mathbb{1}_n$: Einheitsmatrix

Satz 27.13

$GL_n(K) := \{A \in \mathrm{Mat}_n(K) \mid A \text{ ist invertierbar}\}$ ist bezüglich der Matrixmultiplikation eine Gruppe mit Neutralem $\mathbb{1}_n$ und A^{-1} als Inversen zu A, nicht kommutativ für $n \geq 2$.

Beweis: · $A, B \in GL_n(K) \Rightarrow \exists\ A^{-1}$ und B^{-1} mit $A^{-1} \circ A = \mathbb{1}_n = A \circ A^{-1}$

und $B^{-1} \circ B = \mathbb{1}_n = B \circ B^{-1}$

$$\Rightarrow (B^{-1} \circ A^{-1}) \circ (A \circ B) = \mathbb{1}_n = (A \circ B) \circ (B^{-1} \circ A^{-1})$$

$$\Rightarrow A \circ B \in GL_n(K)$$

- Assoziativgesetz: 27.10
- $\mathbb{1}_n$ ist das Neutrale (nachrechnen)
- A^{-1} ist per Definition das Inverse zu A.

$\square$

Bemerkung 27.14

Es gilt auch: $(Mat_n(K), +, \circ)$ ist ein Ring mit 1.

§ 28 Vektorräume und lineare Abbildungen

A) Vektorräume

Def. 28.1

Ein K-Vektorraum ist eine nicht-leere Menge zusammen mit zwei 2-stelligen Operationen

$$+ : V \times V \longrightarrow V : (x,y) \longmapsto x+y \qquad (\text{"Vektoraddition"})$$

und

$$\cdot : \mathbb{K} \times V \longrightarrow V : (\lambda, x) \longmapsto \lambda \cdot x \qquad (\text{"Skalarmultiplikation"})$$

so, dass folgende Axiome gelten:

① $(V,+)$ ist eine abelsche Gruppe mit Neutralem $0 = 0_V$.

② $\forall\, x,y \in V$ und $\forall\, \lambda, \mu \in K$:

- $(\lambda+\mu)\cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x$ } verallgemeinertes Distributivgesetz
- $\lambda \cdot (x+y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$
- $(\lambda \cdot \mu)\cdot x = \lambda \cdot (\mu \cdot x)$ verallgemeinertes Assoziativgesetz.
- $1 \cdot x = x$

Bsp. 28.2

ⓐ $K^0 := \{0\}$ mit $0+0=0$ und $\lambda \cdot 0 = 0 \ \forall \lambda$ ist ein Vektorraum, der Nullraum.

ⓑ K ist ein K-Vektorraum bzgl. der Addition und Multiplikation des Körpers.

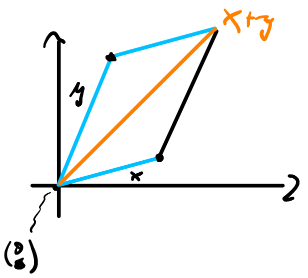
ⓒ $\mathbb{R}$ ist auch ein $\mathbb{Q}$-Vektorraum und $\mathbb{C}$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum.

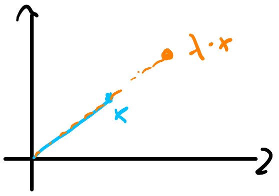
ⓓ $\mathrm{Mat}(m\times n, K)$ ist ein K-Vektorraum mit Null $= \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ mit Addition und Skalarmultiplikation wie in 27.2.

ⓔ $K^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \middle| x_i \in K \right\} = \mathrm{Mat}(n \times 1, K)$ ist ein K-Vektorraum mit komponentenweiser Addition und Skalarmultiplikation!

z.B.: · $\mathbb{R}^n$ ist $\mathbb{R}$-VR, $\mathbb{C}^n$ ist $\mathbb{C}$-VR, $\mathbb{F}_2^n$ ist ein $\mathbb{F}_2$-VR

z.B.: $\mathbb{F}_2^3 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ ist $\mathbb{F}_2$-VR z.B.: in $\mathbb{R}^2$





(f) Sei M eine Menge und V ein K-VR.

Setze:
- $V^M := \{f : M \longrightarrow V \mid f \text{ ist Abbildung}\}$
- $f+g : M \longrightarrow V$ mit $(f+g)(m) = \underset{\overset{\cap}{V}}{f(m)} + \underset{\overset{\cap}{V}}{g(m)} \in V$
- $\lambda \cdot f : M \longrightarrow V$ mit $(\lambda \cdot f)(m) = \lambda \cdot f(m) \in V$

Dann: V^M ist ein K-Vektorraum.

z.B.: $M = \mathbb{N}$, $K = \mathbb{R}$

Dann ist $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \{a : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \mid a \text{ Abb.}\} = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid a_n \in \mathbb{R}\}$

ist der Vektorraum der Folgen über $\mathbb{R}$

mit komponentenweise Addition und Skalarmultiplikation.

(g) $K[t] = \{\sum_{k=0}^{n} a_k t^k \mid a_k \in K,\ n \in \mathbb{N}\}$, die Polynome,

ist ein K-VR mit der Addition und Skalarmultiplikation

aus 26.1.

Lemma 28.3

(a) $\forall x \in V : \quad 0_K \cdot x = 0_V$

$\forall \lambda \in K : \quad \lambda \cdot 0_V = 0_V$

(b) $\lambda \cdot x = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda = 0_K$ oder $x = 0_V$

(c) $\forall x \in V : \quad (-1) \cdot x = -x$

Beweis:

(a) $0_V + \cancel{0_K \cdot x} = 0_K \cdot x = (0_K + 0_K) \cdot x = 0_K \cdot x + \cancel{0_K \cdot x}$

$\underset{KR}{\Longrightarrow} \quad 0_V = 0_K \cdot x$. Analog: $\lambda \cdot 0_V = 0_V$

ⓑ Sei $\lambda\cdot x = 0_V$.

1. Fall: $\lambda = 0_K \Rightarrow$ fertig

2. Fall: $\lambda \neq 0_K \Rightarrow \exists\, \lambda^{-1}\in K \Rightarrow \overset{\overset{0_V}{\|\,(a)}}{\lambda^{-1}\cdot 0_V} = \underset{\|}{\lambda^{-1}\cdot(\lambda\cdot x)}$

$$x = 1\cdot x = (\lambda^{-1}\cdot\lambda)\cdot x$$

ⓒ $(-1)\cdot x + x = (-1)\cdot x + 1\cdot x = (-1+1)\cdot x = 0_K\cdot x \underset{(a)}{=} 0_V.$

$\Rightarrow (-1)\cdot x = -x$

$\square$

B) Unterräume

Def. 28.4 Sei V ein K-VR und $\overset{\overset{\emptyset}{\neq}}{\mathcal{U}} \subseteq V$.

Dann heißt $\mathcal{U}$ ein Unterraum von V

:⇔ ① $x+y\in\mathcal{U}$ $\forall x,y\in\mathcal{U}$

② $\lambda\cdot x\in\mathcal{U}$ $\forall \lambda\in K,\ x\in\mathcal{U}$

Notation: $\mathcal{U}\leq V$

Prop. 28.5:

$\mathcal{U}\leq V \Longrightarrow \mathcal{U}$ ist ein K-VR (bzgl. + und · auf V)

Beweis:

- $x\in\mathcal{U} \Rightarrow -x = (-1)\cdot x \overset{(2)}{\in} \mathcal{U} \Rightarrow \mathcal{U}$ ist bzgl. Inversen abgeschlossen

$\underset{(1)}{\Longrightarrow}$ $(\mathcal{U},+)$ ist Untergruppe von $(V,+)$, also eine abelsche Grupp

- Rest überträgt sich von V.

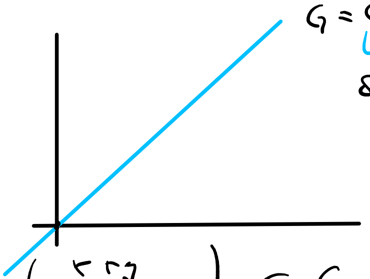
$\square$

Bsp. 28.6

ⓐ $\{0_V\}\leq V$ und $V\leq V$ (triviale Unterräume)

ⓑ $G = \left\{ \begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, y = m\cdot x\right\}$

$= \left\{ \begin{pmatrix} x\\ mx\end{pmatrix} \,\middle|\, x\in\mathbb{R}\right\} \leq \mathbb{R}^2$



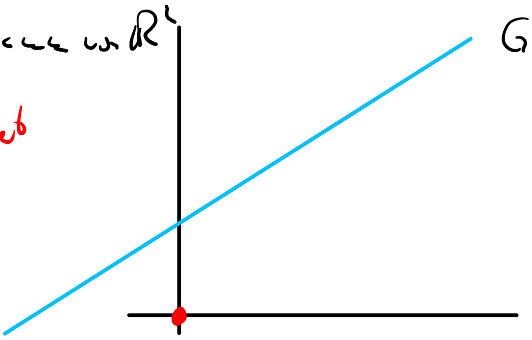
G = Gerade durch den Ursprung mit Steigung m

denn: · $\begin{pmatrix} x\\ mx\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y\\ my\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y\\ mx+my\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y\\ m\cdot(x+y)\end{pmatrix} \in G$

· $\lambda\cdot\begin{pmatrix} x\\ mx\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x\\ \lambda m x\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x\\ m\lambda x\end{pmatrix} \in G$

ⓒ Dann ist G **kein** Unterraum von $\mathbb{R}^2$

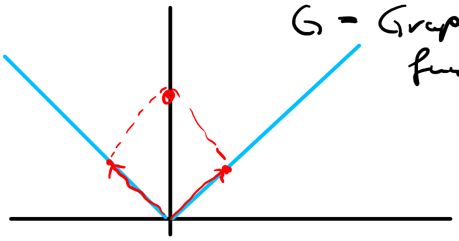
Weil der Nullvektor $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ nicht in G enthalten ist!!!



G = Gerade die nicht durch den Ursprung geht

ⓓ Dann ist G **kein** Unterraum von $\mathbb{R}^2$,

denn: $\underset{G}{\underset{\cap}{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}}} + \underset{G}{\underset{\cap}{\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}}} = \begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix} \notin G$



G = Graph der Betragsfunktion

ⓔ $\mathcal{U} = \{ (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid a_n \in \mathbb{R},\ (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ ist konvergent} \} \underset{\text{Grenzwertsätze}}{\leq} \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

ⓕ Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall.

$\Rightarrow$ · $\mathcal{C}(I,\mathbb{R}) = \{ f: I \to \mathbb{R} \mid f \text{ stetig} \} \leq \mathbb{R}^I$

· $\mathcal{C}^k(I,\mathbb{R}) = \{ f: I \to \mathbb{R} \mid f \text{ ist } k\text{-fach stetig differenzierbar} \} \leq \mathcal{C}(I,\mathbb{R})$

ⓖ $P_n := \left\{ \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot t^k \;\middle|\; a_k \in K \right\} \leq K[t]$

Lemma 28.7:
Der Durchschnitt beliebig vieler Unterräume von V ist ein Unterraum von V.

Beweis:
Sei $\mathcal{U}_i \leq V$ für $i \in I$. Setze: $\mathcal{U} := \bigcap_{i\in I} \mathcal{U}_i$.

$\Downarrow$

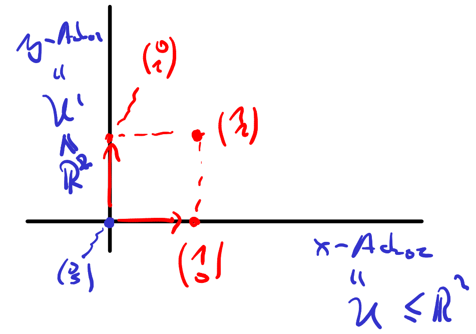
$0_V \in \mathcal{U}_i \ \forall i \in I \Rightarrow 0_V \in \bigcap_{i\in I} \mathcal{U}_i = \mathcal{U} \Rightarrow \mathcal{U} \neq \emptyset$

Seien $x, y \in \mathcal{U}$ und $\lambda \in K$.

$\hookrightarrow x, y \in \mathcal{U}_i \ \forall i \in I \underset{\mathcal{U}_i \leq V}{\Longrightarrow} x+y \in \mathcal{U}_i$ und $\lambda \cdot x \in \mathcal{U}_i \ \forall i \in I$

$\Rightarrow x+y,\ \lambda \cdot x \in \bigcap_{i\in I} \mathcal{U}_i = \mathcal{U}$ $\square$

Bem. 28.8:



$$\mathcal{U} \cup \mathcal{U}' \not\leq \mathbb{R}^2$$

denn: $\overset{\rotatebox{90}{$\in$}}{\binom{1}{0}} + \overset{\rotatebox{90}{$\in$}}{\binom{0}{1}} = \binom{1}{1} \notin \mathcal{U} \cup \mathcal{U}'$

C) Die lineare Hülle und Summe von Unterräumen

Def. 28.9 Sei V ein K-VR.

ⓐ $x \in V$ heißt eine Linearkombination von $x_1, \dots, x_k \in V$

$:\Longleftrightarrow \exists\, \lambda_1, \dots, \lambda_k \in K : \quad x = \lambda_1 \cdot x_1 + \lambda_2 \cdot x_2 + \dots + \lambda_k \cdot x_k$.

ⓑ Sei $M \subseteq V$.

Dann heißt $\mathrm{Lin}(M) := \langle M \rangle := \bigcap_{\substack{\mathcal{U} \leq V \\ M \subseteq \mathcal{U}}} \mathcal{U} \underset{28.8}{\leq} V$ (der kleinste Unterraum von V, der M enthält)

die lineare Hülle oder das Erzeugnis von M.

Bem. 28.10:

$$\mathrm{Lin}(\emptyset) = \bigcap_{\mathcal{U} \leq V} \mathcal{U} = \{0_V\}$$

Prop. 28.11

Sei V ein K-VR und $\emptyset \neq M \subseteq V$.

Dann: $\mathrm{Lin}(M) = \left\{ \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cdot x_k \;\middle|\; \lambda_k \in K,\ x_k \in M,\ n \geq 1 \right\}$

= Menge aller endlichen Linearkombinationen von Elementen in M

Beweis: Setze: $\mathcal{U} := \{ \sum \dots \}$ = rechte Seite.

"$\supseteq$" Seien $\lambda_k \in K$ und $x_k \in M$ für $k = 1, \dots, n$

$\Rightarrow$ $\lambda_1 \cdot x_1 + \dots + \lambda_n \cdot x_n$ ist in jedem Unterraum enthalten, der M enthält

$\Rightarrow$ $\overset{\cap}{\mathrm{Lin}}(M)$ $\Rightarrow$ $\mathcal{U} \subseteq \mathrm{Lin}(M)$

"$\subseteq$" · $M \neq \emptyset$ und $M \subseteq \mathcal{U}$, weil $x \in M \Rightarrow \overset{\overset{x}{\shortparallel}}{1 \cdot x} \in \mathcal{U}$. Also: $\mathcal{U} \neq \emptyset$

· $\sum \lambda_k x_k \in \mathcal{U}$, $\sum \mu_\ell y_\ell \in \mathcal{U}$ $\Rightarrow$ $\sum \lambda_k x_k + \sum \mu_\ell y_\ell \in \mathcal{U}$, $\lambda \cdot \sum \lambda_k x_k = \sum \lambda \cdot \lambda_k \cdot x_k \in \mathcal{U}$ □

Bsp. 28.12

ⓐ $M = \{x_1, \dots, x_n\} \subseteq V$ endlich

$$\Longrightarrow \quad \mathrm{Lin}(M) = \left\{ \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cdot x_k \;\middle|\; \lambda_1, \dots, \lambda_n \in K \right\}$$

Insbesondere: $\mathrm{Lin}(x) = \{\lambda \cdot x \mid \lambda \in K\}$

ⓑ $x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

$$\Longrightarrow \quad \mathrm{Lin}(x_1, x_2) = \left\{ \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\} = \mathbb{R}^2$$

ⓒ $x = \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{Lin}(x) = \left\{ \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda \in \mathbb{R} \right\} = \underbrace{\left\{ \begin{pmatrix} \lambda \\ m\lambda \end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda \in \mathbb{R} \right\}}$

"
Gerade mit
Steigung m

ⓓ $\mathrm{Lin}(t^0, t^1, \dots, t^n) = P_n$

Prop. 28.13

Seien $\mathcal{U}, \mathcal{U}'$ zwei Unterräume von V.

Dann: $\mathcal{U} + \mathcal{U}' := \{u + u' \mid u \in \mathcal{U}, u' \in \mathcal{U}'\} \overset{!}{=} \mathrm{Lin}(\mathcal{U} \cup \mathcal{U}') \leq V$

(Summe von $\mathcal{U}$ und $\mathcal{U}'$) ← Summe von $\mathcal{U}$ und $\mathcal{U}'$ ersetzt bei Vektorräumen die Vereinigung!

Beweis:

"$\subseteq$" $\mathcal{U}, \mathcal{U}' \subseteq \mathcal{U} \cup \mathcal{U}' \underset{28.11}{\Longrightarrow} 1 \cdot u + 1 \cdot u' \in \mathrm{Lin}(\mathcal{U} \cup \mathcal{U}') \quad \forall u \in \mathcal{U}, u' \in \mathcal{U}'$

"$\supseteq$" $\underbrace{\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \cdot \underset{\underset{\mathcal{U}}{\uparrow}}{u_i}}_{\substack{\shortparallel\\ : \\ u \\ \cap \\ \mathcal{U}}} + \underbrace{\sum_{j=1}^{l} \mu_j \cdot \underset{\underset{\mathcal{U}'}{\cap}}{u'_j}}_{\substack{\shortparallel\\ : \\ u' \\ \cap \\ \mathcal{U}'}} \in \mathrm{Lin}(\mathcal{U} \cup \mathcal{U}')$

$\cap|$

$\in \mathcal{U} + \mathcal{U}'$

Ⓑ

Bem. 28.14.

$\mathcal{U}_1, \dots, \mathcal{U}_n \leq V \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{U}_1 + \dots + \mathcal{U}_n := \{u_1 + \dots + u_n \mid u_i \in \mathcal{U}_i\}$

$\overset{?}{\shortparallel}$

$\mathrm{Lin}(\mathcal{U}_1 \cup \dots \cup \mathcal{U}_n)$

Bsp. 28.15

$\mathcal{U} = \text{Lin}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right)$, $\mathcal{U}' = \text{Lin}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\right) \leq \mathbb{R}^3$

Beachte: $\forall x \in \mathcal{U} + \mathcal{U}' : \exists u \in \mathcal{U}, u' \in \mathcal{U}' : x = u + u'$

Frage: ist die Darstellung eindeutig?

Antwort: i.a. NEIN!

z.B.: $x = \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} = \underset{\mathcal{U}}{\begin{pmatrix}0\\-1\\-1\end{pmatrix}} + \underset{\mathcal{U}'}{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}} = \underset{\mathcal{U}}{\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}} + \underset{\mathcal{U}'}{\begin{pmatrix}-1\\0\\-1\end{pmatrix}}$

Def. 28.16

Seien $\mathcal{U}_1, \dots, \mathcal{U}_n$ Unterräume von V und $\mathcal{U} = \mathcal{U}_1 + \dots + \mathcal{U}_n$.

Dann heißt $\mathcal{U}$ die direkte Summe von $\mathcal{U}_1, \dots, \mathcal{U}_n$

$:\Leftrightarrow \forall x \in \mathcal{U} \; \exists_1 \, u_1 \in \mathcal{U}_1, \dots, u_n \in \mathcal{U}_n : x = u_1 + \dots + u_n$

Notation: $\mathcal{U} = \mathcal{U}_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{U}_n$

Prop. 28.17

Seien $\mathcal{U}, \mathcal{U}', W \leq V$.

Dann: $W = \mathcal{U} \oplus \mathcal{U}' \Leftrightarrow$ ① $W = \mathcal{U} + \mathcal{U}'$
② $\mathcal{U} \cap \mathcal{U}' = \{0\}$

Beweis:

"$\Rightarrow$" . $W = \mathcal{U} \oplus \mathcal{U}' \underset{\text{Def.}}{\Longrightarrow} W = \mathcal{U} + \mathcal{U}' \Rightarrow$ ①

. Sei $x \in \mathcal{U} \cap \mathcal{U}' \Rightarrow x = \underset{\mathcal{U}}{x} + \underset{\mathcal{U}'}{0} = \underset{\mathcal{U}}{0} + \underset{\mathcal{U}'}{x}$

$\underset{\text{Eindeutigkeit der Darstellung}}{\Longrightarrow} x = 0 \Rightarrow$ ②

"$\Leftarrow$" . ① $\Rightarrow W = \mathcal{U} + \mathcal{U}'$

. Sei $x \in W$ und $x = x_1 + x_1' = x_2 + x_2'$ mit $x_1, x_2 \in \mathcal{U}$, $x_1', x_2' \in \mathcal{U}'$

z.z.: $x_1 = x_2$ und $x_1' = x_2'$

$\Rightarrow \underbrace{x_1 - x_2}_{\in \mathcal{U}} = \underbrace{x_2' - x_1'}_{\in \mathcal{U}'} \in \mathcal{U} \cap \mathcal{U}' = \{0\} \Rightarrow x_1 - x_2 = 0, \; x_2' - x_1' = 0$

$\Rightarrow x_1 = x_2, \; x_2' = x_1'$ ▯

Bsp. 28.18

$\mathcal{U} = \mathrm{Lin}\left(\left(\begin{smallmatrix}1\\1\\1\end{smallmatrix}\right)\right), \quad \mathcal{U}' = \mathrm{Lin}\left(\left(\begin{smallmatrix}1\\0\\1\end{smallmatrix}\right)\right) \leq \mathbb{R}^3$

Zeige: $\mathcal{U} \cap \mathcal{U}' = \left\{\left(\begin{smallmatrix}0\\0\\0\end{smallmatrix}\right)\right\}$

Sei $x \in \mathcal{U} \cap \mathcal{U}'$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow \cdot\ \exists \lambda \in \mathbb{R}: \quad x = \lambda \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda\\\lambda\\\lambda\end{pmatrix} \\ \qquad\qquad\qquad\quad \| \\ \quad\ \cdot\ \exists \mu \in \mathbb{R}: \quad x = \mu \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mu\\0\\\mu\end{pmatrix} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{c} \lambda = \mu \\ \| \\ 0 \\ \Downarrow \\ x = \begin{pmatrix}\lambda\\\lambda\\\lambda\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \end{array}$$

Also: $\mathcal{U} + \mathcal{U}' \overset{!}{=} \mathcal{U} \oplus \mathcal{U}'$

D) Lineare Abbildungen

Def. 28.19: Seien V und W zwei K-Vektorräume.

ⓐ $f: V \to W$ heißt K-lineare Abbildung oder Vektorraumhomomorphismus

$:\Leftrightarrow$ ① $\forall x, y \in V$: $f(x+y) = f(x) + f(y)$

② $\forall \lambda \in K, x \in V$: $f(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot f(x)$

$\Leftrightarrow \forall x, y \in V, \lambda, \mu \in K$: $f(\lambda \cdot x + \mu \cdot y) = \lambda \cdot f(x) + \mu \cdot f(y)$

ⓑ Sei $f: V \to W$ eine lineare Abbildung.

Wenn f injektiv ist, heißt f ein Monomorphismus.
" " surjektiv ", " " " Epimorphismus.
" " bijektiv ", " " " Isomorphismus.
Wenn $V = W$, dann heißt f ein Endomorphismus.
" " und f ist bijektiv, dann heißt f ein Automorphismus.

ⓒ V und W heißen isomorph $:\Leftrightarrow \exists_1 f: V \to W$ Isomorphismus.

Notation: $V \cong W$

ⓓ $\mathrm{Hom}_K(V, W) := \{f: V \longrightarrow W \mid f \text{ ist } K\text{-linear}\} \subseteq W^V$

$\mathrm{End}_K(V) := \mathrm{Hom}_K(V, V)$ = Menge aller Endomorphismen von $V \subseteq V^V$

Bsp. 28.21

ⓐ $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} : \begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} \longmapsto x_1 - x_2$ ist $\mathbb{R}$-linear

Denn: $\cdot\ f\left(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}\right) = f\left(\begin{pmatrix}x_1+y_1\\x_2+y_2\end{pmatrix}\right) = (x_1+y_1)-(x_2+y_2)$

$$\|$$

$$f\left(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\right)+f\left(\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}\right) = (x_1-x_2)+(y_1-y_2) = x_1-x_2+y_1-y_2$$

$$\cdot\ f\left(\lambda\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\right) = f\left(\begin{pmatrix}\lambda x_1\\\lambda x_2\end{pmatrix}\right) = \lambda x_1 - \lambda x_2 = \lambda\cdot(x_1-x_2) = \lambda\cdot f\left(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\right)$$

ⓑ $D : \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R}) : f \longmapsto f'$

ist eine lineare Abbildung, weil $(f+g)' = f'+g'$
und $(\lambda\cdot f)' = \lambda\cdot f'$

ⓒ
$$\begin{array}{ccc} f : \mathbb{R}[t] & \longrightarrow & \mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid a_n \in \mathbb{R}\} \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ \sum\limits_{k=0}^{n} b_k\cdot t^k & \longmapsto & (b_0, b_1, \dots, b_n, 0, \dots) \end{array}$$

ist eine lineare Abbildung, sogar ein Monomorphismus,

mit $\mathrm{Im}(f) = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid a_n\in\mathbb{R}$, nur endlich viele a_n sind $\neq 0\}$
= Unterraum der abbrechenden Folgen in $\mathbb{R}$

Also: $\mathbb{R}[t] \cong \mathrm{Im}(f)$

ⓓ $d : K[t] \longrightarrow K[t] : \sum\limits_{k=0}^{n} a_k\cdot t^k \longmapsto \sum\limits_{k=1}^{n} k\cdot a_k\cdot t^{k-1}$,

die formale Ableitung, ist eine K-lineare Abbildung.

Lemma 28.22

Seien U, V, W K-Vektorräume, $f\in\mathrm{Hom}_K(U,V)$, $g\in\mathrm{Hom}_K(V,W)$,
$x, x_1, \dots, x_n \in U$, $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$.

ⓐ $f(0_U) = 0_V$ und $f(-x) = -f(x)$

ⓑ $f(\lambda_1\cdot x_1 + \dots + \lambda_n\cdot x_n) = \lambda_1\cdot f(x_1) + \dots + \lambda_n\cdot f(x_n)$

ⓒ f bijektiv $\Rightarrow$ $f^{-1} : V \to U$ ist K-linear

ⓓ $g\circ f$ ist K-linear

ⓔ $\mathrm{Hom}_K(V,W) \leq V^W$, insbesondere ist $\mathrm{Hom}_K(V,W)$ ein K-Vektorraum.

Beweis: ⓐ 22.22, weil f GH. ⓑ Induktion ⓒ wie 22.22 ⓓ wie 22.22 ⓔ ÜA. ∎

Prop. 28.23

$A \in \mathrm{Mat}(m\times n, K) \Longrightarrow f_A : K^n \to K^m ;\ x \mapsto A\circ x$ ist K-linear

Beweis:

- $f_A(x+y) = A\circ(x+y) \overset{27.8}{=} A\circ x + A\circ y = f_A(x) + f_A(y)$
- $f_A(\lambda x) = A\circ(\lambda x) \overset{27.8}{=} \lambda\cdot(A\circ x) = \lambda\cdot f_A(x)$

$\blacksquare$

Bsp. 28.24

ⓐ Fall: $n = 1$. $\Rightarrow A = (a)$ mit $a \in K$

$\Rightarrow f_A : K \to K ;\ x \mapsto a\cdot x$ (Multiplikation mit a) ist K-linear.

ⓑ $A = \begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{pmatrix} = \lambda\cdot\mathbb{1}_2$, $\lambda > 1$.

$\Rightarrow f_A : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 ;\ \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda x\\ \lambda y\end{pmatrix} = \lambda\cdot\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

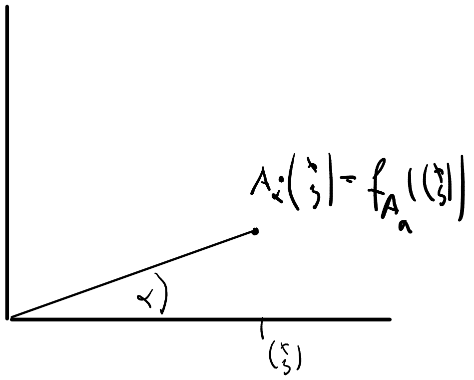
"Streckung um den Faktor λ"

ⓒ $\alpha \in \mathbb{R}$ und $A_\alpha = \begin{pmatrix}\cos(\alpha) & -\sin(\alpha)\\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha)\end{pmatrix}$

$$\Rightarrow f_{A_\alpha} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 ;\ \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \mapsto A_\alpha\circ\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos(\alpha)\cdot x & -\sin(\alpha)\cdot y\\ \sin(\alpha)\cdot x & +\cos(\alpha)\cdot y\end{pmatrix}$$

ist eine Drehung um den Winkel α (um $\binom{0}{0}$) gegen den Uhrzeigersinn

und ist $\mathbb{R}$-linear!



ⓓ $\mathrm{pr} : K^n \longrightarrow K^m$ mit $n \geq m$

$\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_m\end{pmatrix}$

$i : K^n \longrightarrow K^m$ mit $n \leq m$

$\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$

$\Big\}$ sind K-linear.

Prop. 28.25

Seien V, W K-VRe und $f: V \longrightarrow W$ sei K-linear.

ⓐ $U \leq V \Rightarrow f(U) \leq W$

ⓑ $U \leq W \Rightarrow f^{-1}(U) \leq V$

ⓒ $\mathrm{Im}(f) \leq W$

ⓓ $\mathrm{Ker}(f) = \{x \in V \mid f(x) = 0_W\} \leq V$

Beweis: Wie 22.22 □

Bsp. 28.26

$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R};\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \longmapsto x_1 - x_2$ (siehe Bsp. 28.21)

Zeige: $\mathrm{Ker}(f) = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda \end{pmatrix} \middle| \lambda \in \mathbb{R} \right\}$

"$\supseteq$" $f\left(\begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda \end{pmatrix}\right) = \lambda - \lambda = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(f)$

"$\subseteq$" Sei $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(f) \Rightarrow 0 = f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = x_1 - x_2$

$\Rightarrow x_1 = x_2 =: \lambda \Rightarrow x = \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda \end{pmatrix}$

Zeige: $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}$

"$\subseteq$" ✓

"$\supseteq$" Sei $y \in \mathbb{R}$ beliebig gegeben.

Setze: $x := \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow \underset{\mathrm{Im}(f)}{\underset{\wedge}{f(x)}} = y - 0 = y$

□

Prop. 28.27

Sei $f: V \longrightarrow W$ linear.

Dann: f ist injektiv $\Longleftrightarrow$ $\mathrm{Ker}(f) = \{0_V\}$

Beweis: 22.23 □

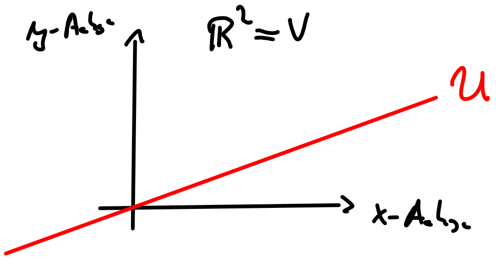
E) Faktorräume

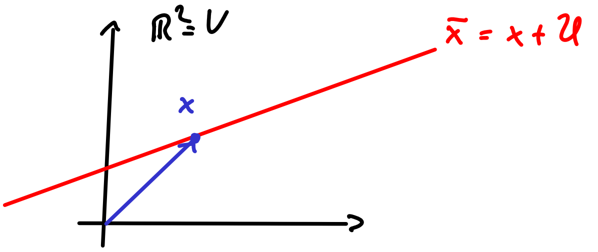
Def. 28.28 (vgl. 24.2)

Sei V ein k-VR und $\mathcal{U} \leq V$.

ⓐ Für $x \in V$ heißt $\bar{x} := x + \mathcal{U} = \{x+u \mid u \in \mathcal{U}\}$ die Restklasse oder Nebenklasse von x modulo $\mathcal{U}$.

ⓑ $V/_{\mathcal{U}} := \{\bar{x} \mid x \in V\} = \{x+\mathcal{U} \mid x \in V\}$ heißt der Faktorraum von V modulo $\mathcal{U}$.





Lemma 28.29

Sei V ein k-VR und $\mathcal{U} \leq V$.

Dann gilt in $V/_{\mathcal{U}}$:

ⓐ Entweder $\bar{x} = \bar{y}$, oder $\bar{x} \cap \bar{y} = \emptyset$.

ⓑ
- $\bar{x} = \bar{y} \iff x - y \in \mathcal{U}$
- $\bar{x} = \bar{0} \iff x \in \mathcal{U}$

ⓒ $$\left.\begin{array}{l} \bar{x} = \bar{x'} \\ \bar{y} = \bar{y'} \end{array}\right\} \Rightarrow \overline{x+y} = \overline{x'+y'}, \quad \overline{\lambda \cdot x} = \overline{\lambda \cdot x'}$$

Beweis: ⓐ siehe 24.2

ⓑ 24.2

ⓒ $$\left.\begin{array}{lll} \bar{x} = \bar{x'} & \Rightarrow & x - x' \in \mathcal{U} \\ \bar{y} = \bar{y'} & \Rightarrow & y - y' \in \mathcal{U} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \underset{(x-x')+(y-y') \in \mathcal{U}}{(x+y)-(x'+y') \;\; \|} \Rightarrow \overline{x+y} = \overline{x'+y'} \\ \lambda \cdot (x-x') \in \mathcal{U} \\ \quad \| \\ \lambda x - \lambda x' \\ \quad \Rightarrow \overline{\lambda x} = \overline{\lambda x'} \end{array}$$

□

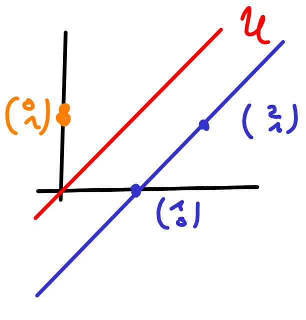
Bsp. 28.30

Sei $V = \mathbb{R}^2$, $\mathcal{U} = \mathrm{Lin}\left(\binom{1}{1}\right)$

$\Rightarrow \overline{\binom{1}{0}} = \binom{1}{0} + \mathcal{U} = \binom{2}{1} + \mathcal{U} = \overline{\binom{2}{1}} \Rightarrow \binom{1}{0} - \binom{2}{1} \overset{\|}{} \binom{1}{1} \in \mathcal{U}$

$\neq$

$\overline{\binom{0}{1}} = \binom{0}{1} + \mathcal{U}$, weil $\binom{1}{0} - \binom{0}{1} = \binom{1}{-1} \notin \mathcal{U}$



Satz 28.31

Sei V ein K-VR und $\mathcal{U} \leq V$.

Dann ist $V/\mathcal{U}$ ein K-VR durch

$$\bar{x} + \bar{y} := \overline{x+y} \quad \text{und} \quad \lambda \cdot \bar{x} := \overline{\lambda \cdot x} \, .$$

Zudem: $\pi : V \longrightarrow V/\mathcal{U} : x \longmapsto \bar{x}$ ist ein Epimorphismus

mit $\mathrm{Ker}(\pi) = \mathcal{U}$. (Restklassenabbildung)

Beweis: 28.30 $\Rightarrow$ + und · sind wohldefiniert!

- $(V/\mathcal{U}, +)$ ist eine abelsche Gruppe wegen 24.14
- Für $\bar{x}, \bar{y} \in V/\mathcal{U}$, $\lambda, \mu \in K$ gelten:
  - $(\lambda+\mu)\cdot\bar{x} \underset{\text{Def}}{=} \overline{(\lambda+\mu)\cdot x} \underset{\text{Rechnen in } V}{=} \overline{\lambda x + \mu x} \underset{\text{Def}}{=} \lambda\cdot\bar{x} + \mu\cdot\bar{x}$
  - $\lambda\cdot(\bar{x}+\bar{y}) = \lambda\cdot(\overline{x+y}) = \overline{\lambda\cdot(x+y)} = \overline{\lambda x + \lambda y} = \lambda\cdot\bar{x} + \lambda\cdot\bar{y}$
  - $(\lambda\cdot\mu)\,\bar{x} = \overline{(\lambda\cdot\mu)\cdot x} = \overline{\lambda\cdot(\mu\cdot x)} = \lambda\cdot\overline{\mu\cdot x} = \lambda\cdot(\mu\cdot\bar{x})$
  - $1\cdot\bar{x} = \overline{1\cdot x} = \bar{x}$
- Also: $(V/\mathcal{U}, +, \cdot)$ ist K-VR.
- $$\left.\begin{aligned} \pi(x+y) &= \overline{x+y} = \bar{x} + \bar{y} = \pi(x) + \pi(y) \\ \pi(\lambda\cdot x) &= \overline{\lambda\cdot x} = \lambda\cdot\bar{x} = \lambda\cdot\pi(x) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \pi \text{ ist linear}$$
- Sei $\bar{x} \in V/\mathcal{U} \Rightarrow \bar{x} = \pi(x) \in \mathrm{Im}(\pi) \Rightarrow \pi$ ist surjektiv
- $x \in \mathrm{Ker}(\pi) \Leftrightarrow \bar{0} = \pi(x) = \bar{x} \underset{28.30}{\Leftrightarrow} x \in \mathcal{U}$

  Also: $\mathrm{Ker}(\pi) = \mathcal{U}$. $\square$

Bem. 28.33

Um im Faktorraum rechnen zu können, braucht man nur die folgenden Rechenregeln:

① $\bar{0} = 0 + \mathcal{U} = \mathcal{U}$ ist der Nullvektor in $V/\mathcal{U}$

② $\bar{x} + \bar{y} = \overline{x+y}$ ③ $\lambda\cdot\bar{x} = \overline{\lambda\cdot x}$

④ $\bar{x} = \bar{y} \Leftrightarrow x - y \in \mathcal{U}$

Homomorphiesatz 28.33

Sei $f: V \longrightarrow W$ eine k-lineare Abbildung.

Dann:
$$\begin{aligned} \bar f : V/\ker(f) &\xrightarrow{\cong} \operatorname{Im}(f) \quad \text{ist ein Isomorphismus.} \\ \rotatebox{90}{$\in$}\; & \qquad\quad \rotatebox{90}{$\in$} \\ \bar x &\longmapsto f(x) \end{aligned}$$

Insbesondere: $V/\ker(f) \cong \operatorname{Im}(f)$.

Beweis:

Zeige: $\bar f$ ist wohldefiniert.

Sei $\bar x = \bar y$. z.z.: $f(x) = f(y)$ ↖

↳ $x - y \in \ker(f) \Rightarrow 0 = f(x-y) = f(x) - f(y)$

Zeige: $\bar f$ ist linear

$$\bar f(\lambda\cdot \bar x + \mu\cdot \bar y) = \bar f(\overline{\lambda\cdot x + \mu\cdot y}) = f(\lambda x + \mu y) \overset{\boxed{f \text{ linear}}}{=} \lambda\cdot f(x) + \mu\cdot f(y)$$
$$\mathbin{/\!/}$$
$$\lambda\cdot \bar f(\bar x) + \mu\cdot \bar f(\bar y)$$

Zeige: $\bar f$ ist surjektiv

Sei $y \in \operatorname{Im}(f) \Rightarrow \exists x \in V: y = f(x) \Rightarrow \bar f(\bar x) = f(x) = y$

$\Rightarrow y \in \operatorname{Im}(\bar f)$

Zeige: $\bar f$ ist injektiv

$\bar x \in \ker(\bar f) \Leftrightarrow 0 = \bar f(\bar x) = f(x) \Leftrightarrow x \in \ker(f)$

$\Updownarrow$

$\bar x = \bar 0 \in V/\ker(f)$

Also $\ker(\bar f) = \{\bar 0\} \Rightarrow \bar f$ ist injektiv.

F) Direkte Komplemente

Def. 28.34

Sei V ein k-VR und $\mathcal{U}, \mathcal{U}' \leq V$.

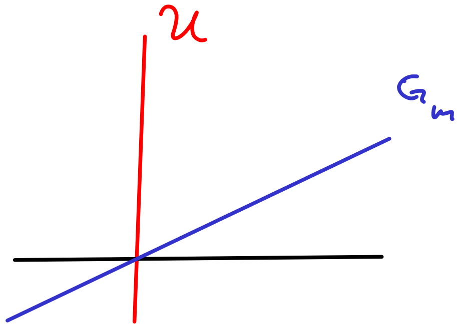
$\mathcal{U}'$ heißt ein direktes Komplement von $\mathcal{U}$

$:\Leftrightarrow \quad V = \mathcal{U} \oplus \mathcal{U}'$

d.h. $V = \mathcal{U} + \mathcal{U}'$ und $\mathcal{U} \cap \mathcal{U}' = \{0\}$.

Bsp. 28.35

$V = \mathbb{R}^2$, $\quad \mathcal{U} = \operatorname{Lin}\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right) = y$-Achse



$G_m = \operatorname{Lin}\left(\begin{pmatrix}1\\m\end{pmatrix}\right)$ = Gerade mit Steigung m durch den Ursprung

ist ein direktes Komplement von $\mathcal{U}$

denn: $\cdot \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = x \cdot \begin{pmatrix}1\\m\end{pmatrix} + (y - m \cdot x)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{U} + G_m = \mathbb{R}^2$

$\cdot \quad G_m \cap \mathcal{U} = \{ \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \}$

Bemerkung: direkte Komplemente sind nicht eindeutig!

Prop. 28.36

$V = \mathcal{U} \oplus \mathcal{U}' \quad \Rightarrow \quad \pi_1 : \mathcal{U}' \xrightarrow{\cong} V/\mathcal{U} : x \mapsto \bar{x}$

ist ein Isomorphismus

Insbesondere: je zwei direkte Komplemente von $\mathcal{U}$ sind isomorph zueinander!

Beweis: $\cdot$ π_1 als Einschränkung der Restklassenabbildung linear.

$\cdot \; \bar{x} \in V/\mathcal{U} \Rightarrow \exists\, y \in \mathcal{U},\, z \in \mathcal{U}' : \; x = y + z \Rightarrow z = x - y \Rightarrow \underset{\pi_1(z)}{\underset{\|}{\bar{z}}} = \overline{x-y} = \bar{x} - \underbrace{\bar{y}}_{\overset{\|}{\bar{0}}} = \bar{x} \quad \Rightarrow \pi_1$ surjektiv

$\cdot \; y \in \underset{\mathcal{U}'}{\underset{\cap}{\ker(\pi_1)}} \Rightarrow \bar{0} = \pi_1(y) = \bar{y} \Rightarrow y \in \mathcal{U} \cap \mathcal{U}' = \{0\}$

$\Rightarrow y = 0 \Rightarrow \ker(\pi_1) = \{0\} \Rightarrow \pi_1$ injektiv

$\square$

§ 29 Basen von Vektorräumen

GV: in § 29 sei V stets ein K-Vektorraum.

A) Linear unabhängige Familien von Vektoren

Def. 29.1: Sei I eine beliebige Menge.

ⓐ Ein Tupel der Form $F=(x_i)_{i\in I}$ mit $x_i \in V$ heißt eine Familie von Vektore

Setze: $|F| := |I|$ und nenne F endlich, wenn $|F| < \infty$

ⓑ $x \in F=(x_i)_{i\in I} \;:\iff\; \exists\, i \in I:\ x = x_i$

ⓒ Für $F=(x_i)_{i\in I}$ und $G=(y_i)_{i\in I}$ setze: $F=G \;:\iff\; x_i=y_i \ \forall i\in I$

ⓓ Für $J\subseteq I$ nenne $F'=(x_i)_{i\in J}$ eine Teilfamilie von $F=(x_i)_{i\in I}$.

Schreibe: $F' \subseteq F$

ⓔ $\mathrm{Lin}(F) := \mathrm{Lin}(\{x_i \mid i\in I\})$ = lineare Hülle von F.

Bsp. 29.2

Sei $I=\{1,2,3\}$ und $x_1=\binom{1}{0},\ x_2=\binom{1}{1},\ x_3=\binom{1}{0} \in \mathbb{R}^2=V$

$$\Rightarrow F := (x_1,x_2,x_3) = \left(\binom{1}{0},\binom{1}{1},\binom{1}{0}\right) \supseteq (x_1,x_3) = \left(\binom{1}{0},\binom{1}{0}\right) =: F'$$

$|F|=3$, $\left|\left\{\binom{1}{0},\binom{1}{1},\binom{1}{0}\right\}\right|=2$ Teilfamilie von F

Bem. 29.3

ⓐ Eine Familie kann Vektoren mehrfach enthalten!

ⓑ Ist I eine geordnete Menge, dann ordnen wir die Familie in derselben Weise. z.B.:

$$\left(\underset{\substack{\shortparallel\\ x_1}}{\binom{1}{0}},\underset{\substack{\shortparallel\\ x_2}}{\binom{1}{1}},\underset{\substack{\shortparallel\\ x_3}}{\binom{1}{0}}\right) \neq \left(\underset{\substack{\shortparallel\\ y_1}}{\binom{1}{0}},\underset{\substack{\shortparallel\\ y_2}}{\binom{1}{0}},\underset{\substack{\shortparallel\\ y_3}}{\binom{1}{1}}\right)$$

ⓒ Typischerweise: $I=\{1,2,\dots,n\}$ für ein $n\geq 1$.

Def. 29.4

ⓐ Eine endliche Familie $(x_1,\dots,x_n)$ in V heißt linear unabhängig

$:\iff \left(\lambda_1x_1+\dots+\lambda_n\cdot x_n=0 \Rightarrow \lambda_1=\dots=\lambda_n=0\right)$

ⓑ Eine endliche Familie $(x_1,\dots,x_n)$ in V heißt linear abhängig

$:\iff \exists\, \lambda_1,\dots,\lambda_n\in K$ nicht alle null: $\lambda_1x_1+\dots+\lambda_nx_n=0$

(c) Eine Familie F in V heißt linear unabhängig
$:\Longleftrightarrow \forall\, F' \subseteq F$ mit $|F'| < \infty$: F' ist linear unabhängig

(d) Eine Familie F in V heißt linear abhängig
$:\Longleftrightarrow \exists\, F' \subseteq F$ mit $|F'| < \infty$: F' ist linear abhängig.

Bsp. 29.5

(a) $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in K^n$ sind linear unabhängig

Denn: $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda_1 \cdot e_1 + \dots + \lambda_n \cdot e_n = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$

(b) $F = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ Familie im $\mathbb{R}^2$, ist linear abhängig

Denn: $1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

(c) $e_k = (\delta_{k,n})_{n \in \mathbb{N}} = (0, \dots, 0, \underset{\underset{k}{\uparrow}}{1}, 0, \dots) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

$\Rightarrow F = (e_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ist linear unabhängig

Denn: Seien $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}$ mit $k_1 < k_2 < \dots < k_n$

und $\lambda_1 \cdot e_{k_1} + \dots + \lambda_n \cdot e_{k_n} = 0 = (0, \dots)$

$\|$

$(0, \dots, \lambda_1, \dots, \lambda_2, \dots, \lambda_n, 0, \dots)$

$\Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$ $\square$

Lemma 29.6

Sei $F = (x_i)_{i \in I}$ eine Familie in V.

(a) $0 \in F \Rightarrow F$ ist linear abhängig.

(b) $\exists\, i \neq j$ mit $x_i = x_j \Rightarrow F$ ist linear abhängig

(c) F ist linear abhängig $\Longleftrightarrow \exists\, x \in F$: x ist Linearkombination von Vektoren in $F \setminus \{x\}$

Beweis:

(a) $1 \cdot 0 = 0 \Rightarrow F$ lin. abh. (b) $1 \cdot x_i + (-1) \cdot x_j = 0 \Rightarrow F$ ist lin. abh.

ⓒ "$\Rightarrow$" F lin. abh. $\Rightarrow$ $\exists\, J \subseteq I$ endlich und $\lambda_i \in K$ nicht alle 0

s.d. $\sum_{i \in J} \lambda_i \cdot x_i = 0$

$\Rightarrow \exists\, j \in J : \lambda_j \neq 0 \Rightarrow x_j = \sum_{\substack{i \in J \\ i \neq j}} -\frac{\lambda_i}{\lambda_j} \cdot x_i$

"$\Leftarrow$" Sei $x_j = \sum_{\substack{i \in J \\ i \neq j}} \lambda_i x_i$ mit $J \subseteq I$ endlich

$\Rightarrow 1 \cdot x_j + \sum_{\substack{i \in J \\ i \neq j}} (-\lambda_i) \cdot x_i = 0 \Rightarrow$ F lin. unabh.

∎

Bsp. 29.7: $F = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ lin. abh. in $\mathbb{R}^2$

Beachte: $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = (-1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Notation 29.8:

Sei $F = (x_i)_{i \in I}$ Familie von Vektoren in V.

Schreibe: $\sum_{\substack{i \in I \\ \text{endlich}}} \lambda_i \cdot x_i$, um auszudrücken, dass nur endlich viele der λ_i ungleich null sind, d.h. dass es sich um eine endliche Linearkomb. handelt.

Lemma 29.9:

Sei $B = (x_i)_{i \in I}$ eine linear unabhängige Familie in V mit $\mathrm{Lin}(B) \subsetneq V$.

Wenn $x \in V \setminus \mathrm{Lin}(B)$, dann $(x, x_i \mid i \in I)$ ist linear unabhängig.

Beweis:

Sei $\lambda \cdot x + \sum_{\substack{i \in I \\ \text{endlich}}} \lambda_i x_i = 0$. z.z.: $\lambda = 0 \wedge \lambda_i = 0 \ \forall i \in I$

Ang: $\lambda \neq 0 \Rightarrow x = \sum_{\substack{i \in I \\ \text{endlich}}} -\frac{\lambda_i}{\lambda} \cdot x_i \in \mathrm{Lin}(B)$ ↯. Also: $\lambda = 0$

Damit: $\sum_{\substack{i \in I \\ \text{endlich}}} \lambda_i x_i = \underbrace{\lambda \cdot x}_{= 0} + \sum_{\substack{i \in I \\ \text{endlich}}} \lambda_i x_i = 0 \xRightarrow[\text{B lin. unabh.}]{} \lambda_i = 0 \ \forall i \in I$

∎

B) Erzeugendensysteme und Basen

Def. 29.10

Sei F eine Familie von Vektoren in V.

ⓐ F heißt ein Erzeugendensystem von V

:⟺ $V = \mathrm{Lin}(F)$

⟺ jeder Vektor in V ist eine Linearkomb. von Vektoren in F.

ⓑ F heißt eine Basis von V

:⟺ F ist ein linear unabhängiges Erzeugendensystem von V

ⓒ V heißt endlich erzeugt :⟺ V hat ein endliches Erzeugendensystem

Bsp. 29.11

ⓐ $e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}, \ e_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}, \ldots, \ e_n = \begin{pmatrix}0\\\vdots\\0\\1\end{pmatrix} \in K^n$

⟹ $B = (e_1, \ldots, e_n)$ ist Basis des K^n (kanonische Basis oder Standardbasis des K^n)

Denn: · B ist lin. unabh. (siehe 29.5)

· Sei $x \in K^n$ ⟹ $x = \begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix} = x_1 \cdot e_1 + \cdots + x_n \cdot e_n$

⟹ B ist EZS von K^n.

ⓑ $$E_i^j = \underset{\overset{\uparrow}{j}}{\begin{pmatrix}0 & \cdots & 0\\ \vdots & 1 & \vdots\\ 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}} \leftarrow i \quad \in \mathrm{Mat}(m \times n, K)$$

⟹ $B = \left(E_i^j \;\middle|\; \begin{matrix} i = 1, \ldots, m \\ j = 1, \ldots, n \end{matrix} \right)$ ist eine Basis von $\mathrm{Mat}(m \times n, K)$

ⓒ $F = \left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \right)$ ist ein EZS von $\mathbb{R}^2$, aber keine Basis

denn: · $x = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ ⟹ F ist EZS

· F nach 29.5 nicht lin. unabh., also keine Basis.

ⓓ $e_k = (0,\dots,0,\underset{\overset{\uparrow}{k}}{1},0,\dots) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

$\Rightarrow B = (e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist lin. unabh., aber kein EZS von $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

Denn: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n \cdot e_n$ ist keine endliche Lin.-komb.

· z.B.: $(1,1,1,\dots)$ ist sicher keine endl. Lin.komb. der $e_0, e_1, \dots$

ⓔ $V = \mathbb{C}$, $K = \mathbb{R}$:

Die Familie $(1, i)$ ist eine Basis von $\mathbb{C}$ als $\mathbb{R}$-VR.

Denn: · EZS: $x + iy \in \mathbb{C}$ beliebig

$$x+iy = x\cdot 1 + y\cdot i$$

· lin. unabh.: $\lambda\cdot 1 + \mu\cdot i = 0$

$$\lambda\cdot 1 + \mu\cdot i = \lambda + i\mu \qquad \Leftrightarrow \lambda = \mu = 0$$

ⓕ $B = (t^0, t^1, t^2, t^3, \dots) = (t^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Basis von $K[t]$

Prop. 29.12

Für eine Familie B von Vektoren in V sind gleichwertig:

① B ist eine Basis von V.

② B ist ein minimales EZS von V.

③ B ist eine maximal linear unabhängige Familie in V.

Dabei:

- B heißt minimales EZS, wenn keine echte Teilfamilie ein EZS von V ist!
- B heißt maximal lin. unabhängig, wenn B in keiner lin. unabh. Familie in V echt enthalten ist.

Beweis: Sei $B = (x_i)_{i\in I}$.

① ⇒ ②: Sei B Basis von V. ⇒ B ist ein EZS von V.

Sei $J \subsetneq I$.

Ang.: $(x_i)_{i\in J}$ ist EZS von V

Wähle $i \in I \setminus J$ ⇒ $x_i \in V = \text{Lin}((x_i)_{i\in J})$

$$\Rightarrow \exists \lambda_j \in K ; \quad x_i = \sum_{\substack{j\in J\\ \text{endlich}}} \lambda_j x_j$$

$$\Rightarrow \quad x_i + \sum_{\substack{j\in I\\ \text{endl.}}} (-\lambda_j)\cdot x_j = 0 \quad \lightning \; B \text{ lin. unabh.}$$

Also: B ist min. EZS von V.

② ⇒ ③: Sei B ein min. EZS von V.

Zeige: B ist lin. unabh.

Ang.: nicht. $\Rightarrow \exists \sum_{\substack{i\in I\\ \text{endl.}}} \lambda_i x_i = 0$, nicht alle $\lambda_i = 0$

$$\Rightarrow j : \lambda_j \neq 0 \quad \Rightarrow \quad x_j = \sum_{\substack{i\in I\\ i\neq j\\ \text{endlich}}} -\frac{\lambda_i}{\lambda_j}\cdot x_i \in \text{Lin}\left((x_j)_{\substack{j\in I\\ j\neq i}}\right)$$

$$\Rightarrow \text{Lin}\left((x_j)_{\substack{j\in I\\ j\neq i}}\right) = \text{Lin}(B) = V \quad \lightning \; B \text{ minimal}$$

Zeige: B maximal lin. unabh.

Sei $x \in \underset{\substack{\parallel\\ \text{Lin}(B)}}{V}$ und $x \notin B$

$$\Rightarrow \exists \lambda_i \in K ; \quad x = \sum_{\substack{i\in I\\ \text{endl.}}} \lambda_i \cdot x_i$$

⇒ $(x, x_i \mid i\in I)$ ist lin. abh.

⇒ B maximal lin. unabh.

③ ⇒ ①: Sei B maximal lin. unabh.

z.z.: B ist ein EZS von V.

Ang.: B ist kein EZS von V

$\Rightarrow \exists\, x \in V \setminus \mathrm{Lin}(B)$

$\underset{29.9}{\Rightarrow}$ $(x, x_i \mid i \in I)$ ist lin. unabhängig ↯ B maximal lin. unabh.

↯

Bsp. 29.14

$B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ ist eine Basis von $\mathbb{R}^2$

Denn: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{x_1+x_2}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{x_1-x_2}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ B ist ein EZS von $\mathbb{R}^2$, und offensichtlich minimal!

Bem. 29.15

ⓐ V endlich erzeugt $\overset{29.13}{\Longrightarrow}$ V hat eine Basis

Werfe aus dem EZS Elemente raus!

ⓑ Man kann allgemein für einen VR V zeigen:

- Jedes EZS enthält eine Basis.
- Jede lin. unabh. Familie ist in einer Basis enthalten.
- Jeder VR hat eine Basis.
- Jeder Unterraum hat ein Komplement!

c) Eindeutige Darstellbarkeit bezüglich einer Basis

Prop. 29.16

B ist eine Basis von V

$\Longleftrightarrow$ Jeder Vektor von V kann auf eindeutige Weise als Linearkombination von Vektoren in B geschrieben werden.

Beweis

"$\Longrightarrow$" Sei B eine Basis von V

$\Longrightarrow$ B ist ein EZS von V

$\Longrightarrow$ jeder Vektor in V ist Lin.komb. von Vektoren in B.

Sei nun $x = \sum_{\substack{i\in I\\ \text{endlich}}} \lambda_i \cdot x_i = \sum_{\substack{i\in I\\ \text{endlich}}} \lambda_i' \cdot x_i$ ⊛

z.z.: $\forall i \in I: \lambda_i = \lambda_i'$.

$$⊛ \Longrightarrow 0 = x - x = \sum_{\substack{i\in I\\ \text{endlich}}} \lambda_i x_i - \sum_{\substack{i\in I\\ \text{endlich}}} \lambda_i' \cdot x_i = \sum_{\substack{i\in I\\ \text{endlich}}} (\lambda_i - \lambda_i') \cdot x_i$$

$$\underset{B \text{ lin.unab.}}{\Longrightarrow} \quad \lambda_i - \lambda_i' = 0 \ \forall i \in I \Longrightarrow \lambda_i = \lambda_i' \ \forall i \in I$$

"$\Longleftarrow$" • Jeder Vektor in V ist Lin.komb. von Vektoren in B

$\Longrightarrow$ B ist ein EZS von V.

• $0 \in V$ lässt sich auf eindeutige Weise als Lin.-komb. von Vektoren in B schreiben!

$\Longrightarrow$ (Wenn $\sum_{\substack{i\in I\\ \text{endlich}}} \lambda_i x_i = 0 \Longrightarrow \lambda_i = 0 \ \forall i \in I$)

$\Longrightarrow$ B lin. unabh. $\square$

Bsp. 29.17

$B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ ist Basis von $V = \mathbb{R}^2$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{x_1 + x_2}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{x_1 - x_2}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

diese Darstellung ist eindeutig !!!

Satz 29.18 (Existenz- und Eindeutigkeitssatz für lin. Abb.)

Seien V und W zwei K-VRe, $\mathcal{B} = (x_i)_{i\in I}$ eine Basis von V und $F = (y_i)_{i\in I}$ eine Familie von Vektoren in W.

Dann: $\exists_1 \; f : V \xrightarrow{\text{linear}} W$ mit $f(x_i) = y_i \quad \forall i \in I$

Insbesondere, zwei lineare Abb. sind gleich, sobald sie auf einer Basis übereinstimmen!

Beweis:

Sei $x \in V \Rightarrow \exists_1 \; \lambda_i \in K : \quad x = \sum_{\substack{i\in I\\ \text{endlich}}} \lambda_i x_i$

Definiere: $f(x) := \sum_{\substack{i\in I\\ \text{endlich}}} \lambda_i \cdot y_i$. "Lineare Fortsetzung"

Zeige: f ist K-linear

Seien $x = \sum_{\substack{i\in I\\ \text{endlich}}} \lambda_i \cdot x_i$, $x' = \sum_{\substack{i\in I\\ \text{endlich}}} \lambda_i' \cdot x_i$, $\lambda, \mu \in K$.

$$\Rightarrow \lambda x + \mu x' = \sum_{\substack{i\in I\\ \text{endlich}}} (\lambda\cdot\lambda_i + \mu\cdot\lambda_i')\cdot x_i$$

$$\Rightarrow f(\lambda x + \mu x') = \sum_{\substack{i\in I\\ \text{endlich}}} (\lambda\cdot\lambda_i + \mu\cdot\lambda_i')\cdot y_i$$

$$\|$$

$$\lambda\cdot\sum_{\substack{i\in I\\ \text{endlich}}} \lambda_i\cdot y_i + \mu\cdot\sum_{\substack{i\in I\\ \text{endlich}}} \lambda_i'\cdot y_i$$

$$\|$$

$$\lambda\cdot f(x) + \mu\cdot f(y)$$

Also: f ist K-linear und $f(x_i) = y_i \quad \forall i \in I$

Eindeutigkeit: Sei $g : V \to W$ linear mit $g(x_i) = y_i$. z.z.: $f = g$

Sei $x = \sum_{\substack{i\in I\\ \text{endlich}}} \lambda_i \cdot x_i$. $\Rightarrow f(x) = \sum_{\substack{i\in I\\ \text{endlich}}} \lambda_i y_i = \sum_{\substack{i\in I\\ \text{endlich}}} \lambda_i g(x_i) = g\Big(\sum_{\substack{i\in I\\ \text{endlich}}} \lambda_i x_i\Big) = g(x) \Rightarrow f = g$ $\square$

Bem. 29.19

Satz 29.19 sagt:
die Werte einer linearen Abb. können auf einer Basis beliebig vorgegeben werden – es wird dann immer genau eine lin. Abb. geben, die das erfüllt!

Bsp. 29.20

$$B = \Big(\underset{\overset{\shortparallel}{x_1}}{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}}, \underset{\overset{\shortparallel}{x_2}}{\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}} \Big) \text{ ist Basis von } \mathbb{R}^2, \quad y_1 := \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \; y_2 := \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

$$\underset{29.18}{\Longrightarrow} \quad \exists_1 \; f : \mathbb{R}^2 \xrightarrow[\text{linear}]{} \mathbb{R}^2 \text{ mit } f\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \text{ und } f\left(\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$$

In der Tat: $f\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}2x - y\\x\end{pmatrix}$ tut's !!!

Kor. 29.21

Jede lineare Abbildung $f : K^n \longrightarrow K^m$ ist von der Form $f = f_A$ für eine eindeutig bestimmte Matrix $A \in \mathrm{Mat}(m \times n, K)$.

Beweis:

Betrachte die kanonische Basis $B = (e_1, \ldots, e_n)$ von K^n.

Setze: $a^i := f(e_i) \in K^m$ und $A = (a^1 \cdots a^n) \in \mathrm{Mat}(m \times n, K)$.

$$\Rightarrow \quad f_A(e_i) = A \circ e_i = a^i = f(e_i) \quad \forall i = 1, \ldots, n$$

$$\underset{29.18}{\Longrightarrow} \quad f_A = f.$$

Zudem: A ist eindeutig nach 27.7. $\square$

§ 30 Endlich-dimensionale Vektorräume

GV: V sei ein endlich-erzeugter K-Vektorraum

A) Der Austauschsatz von Steinitz

Austauschlemma 30.1

Sei $B = (x_1, \dots, x_n)$ eine Basis von V, $y = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot x_i$ und $\lambda_j \neq 0$ für ein j.

Dann ist $\underbrace{(x_1, \dots, x_{j-1}, y, x_{j+1}, \dots, x_n)}_{=:F}$ auch eine Basis von V.

Beweis:

- $\lambda_j \neq 0$

$$\Rightarrow \quad x_j = \frac{1}{\lambda_j} \cdot y - \sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n} \frac{\lambda_i}{\lambda_j} \cdot x_i \in \mathrm{Lin}(F)$$

$$\Rightarrow \quad V = \mathrm{Lin}(x_1, \dots, x_n, y) = \mathrm{Lin}(F)$$

$\Rightarrow$ F ist ein EzS von V

- Zeige: F ist lin. unabh.

$$0 = \mu_j \cdot y + \sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n} \mu_i x_i = \mu_j \cdot \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i + \sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n} \mu_i \cdot x_i$$

$$= \mu_j \cdot \lambda_j \cdot x_j + \sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n} (\mu_j \cdot \lambda_i + \mu_i) \cdot x_i$$

$$\underset{B \text{ lin. unabh.}}{\Longrightarrow} \quad \mu_j \cdot \lambda_j = 0 \quad \text{und} \quad \underset{\overset{!!}{0}}{\mu_j} \cdot \lambda_i = -\mu_i \quad \forall\, \substack{i = 1, \dots, n\\ i \neq j}$$

$$\Big\Downarrow \lambda_j \neq 0$$

$$\mu_j = 0 \qquad \Rightarrow \mu_i = 0 \;\; \forall i \neq j$$

$\Rightarrow$ F ist linear unabhängig, also eine Basis von V.

□

Bsp. 30.2

$E = (e_1, \dots, e_n)$ kanonische Basis im K^n, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in K^n$ mit $x_j \neq 0 \Rightarrow e_j$ kann durch x ersetzt werden.

z.B.: $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \Rightarrow (x, e_2, e_3)$ und (e_1, x, e_3) sind Basen des $\mathbb{R}^3$!!!

Austauschsatz von Steinitz 30.3

Sei $(x_1, \dots, x_n)$ eine Basis von V und $(y_1, \dots, y_r)$ sei lin. unabhängig.
Dann lassen sich $x_1, \dots, x_n$ so umnummerieren, dass die Familie

$(y_1, \dots, y_r, x_{r+1}, \dots, x_n)$ eine Basis von V ist.

Insbesondere: $r \leq n$.

Beweis: Induktion nach r:

$r = 0$: ✓

$r-1 \longmapsto r$: Ind. $\Rightarrow$ nach Umnummerieren gilt $(y_1, \dots, y_{r-1}, x_r, \dots, x_n)$ ist eine Basis von V!

$$\Rightarrow \exists \lambda_i \in K: \quad y_r = \lambda_1 y_1 + \dots + \lambda_{r-1} y_{r-1} + \lambda_r \cdot x_r + \dots + \lambda_n \cdot x_n$$

Ang: $\lambda_r = \dots = \lambda_n = 0$

$\Rightarrow \quad y_r = \lambda_1 y_1 + \dots + \lambda_{r-1} \cdot y_{r-1} \Rightarrow (y_1, \dots, y_r)$ ist lin. abh. ↯

Also, $\exists j \in \{r, \dots, n\}: \lambda_j \neq 0$

(Umnummerieren: o.E.: $j = r$)

$\underset{30.1}{\Rightarrow}$ $(y_1, \dots, y_r, x_{r+1}, \dots, x_n)$ Basis von V. □

Kor. 30.5 (Basisergänzungssatz)

Ist $(y_1, \dots, y_r)$ lin. unabhängig in V, dann lässt sich diese Familie zu einer Basis von V ergänzen.

Beweis:
Wähle eine Basis $(x_1, \dots, x_n)$ von V und wende 30.3 an. □

Kor. 30.6

Jeder Unterraum $\mathcal{U}$ von V hat ein direktes Komplement.

Beweis: Wähle eine Basis $(x_1, \dots, x_r)$ von $\mathcal{U}$ und ergänze sie zu einer Basis $(x_1, \dots, x_n)$ von V. Dann ist $\mathcal{U}' = \mathrm{Lin}(x_{r+1}, \dots, x_n)$ ein Komplement von $\mathcal{U}$. □

B) Dimension eines endlich-erzeugten Vektorraumes

Satz 30.7:

ⓐ Sei V ein endlich-erzeugter $\mathbb{K}$-VR. Dann sind je zwei Basen von V gleichmächtig und endlich.

ⓑ Ist V nicht endlich-erzeugt, dann ist jede Basis von V unendlich.

Beweis:

ⓐ V endlich erzeugt $\Rightarrow$ V hat eine endliche Basis $\mathcal{B} = (x_1, \dots, x_n)$

O.E.: n = minimale Anzahl an Elementen einer Basis!

Sei nun B' eine zweite Basis von V.

Ang: $|B'| > n$

$\Rightarrow$ wähle $y_1, \dots, y_{n+1} \in B'$

$\Rightarrow$ $(y_1, \dots, y_{n+1})$ ist lin. unabhängig

$\underset{\substack{30.4\\ \text{Steinitz}}}{\Rightarrow}$ $n+1 \leq n$ ↯

Also: $|B'| \leq n$ $\Rightarrow$ $|B'| = n = |B|$

$\underset{n}{\vee\!\!/}$ ← Minimalität von n

ⓑ Hätte V eine endliche Basis B, dann wäre B ein endl. EZS. ⓩ

Def. 30.8:

$$\dim_K V := \begin{cases} \#B = |B|, & \text{für eine Basis } B \text{ von } V, \text{ wenn } V \text{ endl. erz.} \\ \infty, & \text{sonst} \end{cases}$$

Wenn $\dim_K V < \infty$, dann heißt V endlich-dimensional.

Kor. 30.9

Sei $\dim_K V = n$, E ein EZS von V, F lin. unabh. in V.

Dann: $|E| \geq n$ und $|F| \leq n$.

Zudem: Gleichheit gilt genau dann wenn die Familie eine Basis ist.

Bsp. 30.10

ⓐ $\dim_K V = 0 \iff V = \mathrm{Lin}(\emptyset) = \{0\}$

ⓑ $\dim_K(K^n) = n$, denn $E = (e_1, \dots, e_n)$ ist eine Basis von K^n.

ⓒ $\dim_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}) = \dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}) = \dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}) = \dim_K(K) = 1$

$\dim_{\mathbb{Q}}(\mathbb{R}) = \infty$, $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) = 2$, weil $(1, i)$ ist Basis von $\mathbb{C}$ als $\mathbb{R}$-VR

ⓓ $P_n = \mathrm{Lin}(\underbrace{t^0, t^1, t^2, \dots, t^n}_{\text{Basis von } P_n}) \Rightarrow \dim_K(P_n) = n+1$

Satz 30.11

Sei $B = (x_1, \dots, x_n)$ eine Basis von V, $E = (e_1, \dots, e_n)$ kanon. Basis von K^n.

Dann: $\exists_1 \ \phi_B : V \xrightarrow[\text{linear}]{\cong} K^n$ mit $\phi_B(x_i) = e_i$ für $i = 1, \dots, n$

Beweis:

- 29.18 $\Rightarrow$ $\exists_1 \ \phi_B$ wie oben, das linear ist
- 29.18 $\Rightarrow$ $\exists_1 \ \phi^B : K^n \to V$ linear mit $\phi^B(e_i) = x_i \ \forall i = 1, \dots, n$
- Zudem: 29.18 $\Rightarrow$ $\exists_1 \ V \xrightarrow{\text{lin.}} V : x_i \mapsto x_i$, nämlich $\phi^B \circ \phi_B$ und id_V

$\exists_1 \ K^n \xrightarrow[\text{lin.}]{} K^n : e_i \mapsto e_i$, nämlich $\phi_B \circ \phi^B$ und id_{K^n}

$\Rightarrow \phi^B \circ \phi_B = \mathrm{id}_V \ \wedge \ \phi_B \circ \phi^B = \mathrm{id}_{K^n}$

$\Rightarrow \phi_B$ ist Isomorphismus mit $\phi_B^{-1} = \phi^B$

□

Kor. 30.12

$V \cong W \iff \dim_K(V) = \dim_K(W) \quad (< \infty)$

Beweis:

"⇒" $\phi : V \xrightarrow{\cong} W$, $B = (x_1, \dots, x_n)$ Basis von V

$\Rightarrow \phi(B) = (\phi(x_1), \dots, \phi(x_n))$ Basis von W

$\Rightarrow \dim_K V = n = \dim_K(W)$

"⇐" 30.11 $\underset{\substack{\uparrow \\ n = \dim_K(V) = \dim_K(W)}}{\Rightarrow}$ $V \cong K^n \cong W \Rightarrow V \cong W$

□

Bsp. 30.13

$V = \mathbb{R}^{\mathbb{R}} = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ Abbildung} \}$

$\cup$

$\cos, \sin$

$\Rightarrow \mathcal{U} = \text{Lin}(\cos, \sin) = \{ a \cdot \cos + b \cdot \sin \mid a, b \in \mathbb{R} \}$

Beh: $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{U} = 2$, weil $(\cos, \sin)$ ist Basis von $\mathcal{U}$

z.z: $(\cos, \sin)$ ist lin. unabhängig.

Ansatz: $\lambda \cdot \cos + \mu \cdot \sin = 0$ ← Nullfunktion

$\Rightarrow$ · $\lambda \cdot \cos(0) + \mu \cdot \sin(0) = 0$ ← Zahl 0

" $\lambda \cdot 1 + \mu \cdot 0 = \lambda$

· $\lambda \cdot \cos(\frac{\pi}{2}) + \mu \cdot \sin(\frac{\pi}{2}) = 0$ ← Zahl 0

" $\lambda \cdot 0 + \mu \cdot 1 = \mu$

$\Rightarrow (\cos, \sin)$ ist lin. unabhängig. □

Also: $\mathcal{U} \cong \mathbb{R}^2$

() Dimensionsformeln

Lemma 30.14

Sei $\dim_K V < \infty$ und $\mathcal{U} \leq V$.

Dann $\dim_K \mathcal{U} \leq \dim_K V$

Beweis: Steinitz. $\square$

Satz 30.15:

Sei $\dim_K V < \infty$ und $\mathcal{U}, \mathcal{U}' \leq V$.

Dann: $\dim_K(\mathcal{U}+\mathcal{U}') = \underbrace{\dim_K(\mathcal{U})}_{r+s} + \underbrace{\dim_K(\mathcal{U}')}_{r+t} - \dim_K(\mathcal{U}\cap\mathcal{U}')$

$r+s \quad + \quad r+t \quad - \quad \overset{!!}{r} \quad = r+s+t$

Beweis:

Wähle eine Basis $B_{\mathcal{U}\cap\mathcal{U}'} := (x_1,\dots,x_r)$ von $\mathcal{U}\cap\mathcal{U}'$.

Ergänze sie zu Basis $B_{\mathcal{U}} := (x_1,\dots,x_r,y_1,\dots,y_s)$ von $\mathcal{U}$

" " " Basis $B_{\mathcal{U}'} := (x_1,\dots,x_r,z_1,\dots,z_t)$ von $\mathcal{U}'$

Beh: $B := (x_1,\dots,x_r,y_1,\dots,y_s,z_1,\dots,z_t)$ ist Basis von $\mathcal{U}+\mathcal{U}'$

- Sei $x\in\mathcal{U}$ und $x'\in\mathcal{U}'$

  $\Downarrow$

  $\exists \; x = \sum \mu_i \cdot x_i + \sum \mu_i' \cdot y_i$, $\quad x' = \sum \lambda_i x_i + \sum \lambda_i' \cdot z_i$

  $\Rightarrow \; x + x' = \sum (\mu_i+\lambda_i)\cdot x_i + \sum \mu_i' \cdot y_i + \sum \lambda_i' \cdot z_i \in \mathrm{Lin}(B)$

  $\Rightarrow$ B ist EZS von $\mathcal{U}+\mathcal{U}'$

- Zeige: B ist lin. unabh.

  Ansatz: $\sum_{i=1}^{r} \lambda_i x_i + \sum_{j=1}^{s} \mu_j y_j + \sum_{k=1}^{t} \nu_k \cdot z_k = 0$ $\quad (*)$

  $\Rightarrow \; \underbrace{\sum \lambda_i \cdot x_i + \sum \mu_j \cdot y_j}_{\in \mathcal{U}} = \underbrace{-\sum \nu_k \cdot z_k}_{\in \mathcal{U}'}$ $\quad \in \mathcal{U}\cap\mathcal{U}' \overset{\shortparallel}{\ } \mathrm{Lin}(x_1,\dots,x_r)$

  $\Rightarrow \exists\, \lambda_1',\dots,\lambda_r'$: $\sum \underline{\lambda_i} x_i + \sum \underline{\mu_j} y_j = \sum \underline{\lambda_i'} \cdot x_i + \sum \underline{0} \cdot y_j$

$\Longrightarrow$ $\lambda_i = \lambda_i' \quad \forall i = 1, \dots, r \quad , \quad \zeta_j = 0 \quad \forall j = 1, \dots, s$

$\mathcal{B}_{\mathcal{U}}$ lin. unabh.

$\overset{\Longrightarrow}{\circledast}$ $\sum \lambda_i x_i + \sum \nu_k z_k = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda_i = 0 \ \forall i, \ \nu_k = 0 \ \forall k$

$\mathcal{B}_{\mathcal{U}'}$ lin. unabh.

$\square$

Bsp. 30.16

$$\mathcal{U} = \mathrm{Lin}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right) \leq \mathbb{R}^3, \quad \mathcal{U}' = \mathrm{Lin}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right) \leq \mathbb{R}^3$$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{U} \cap \mathcal{U}' = \mathrm{Lin}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right), \quad \mathcal{U} + \mathcal{U}' = \mathrm{Lin}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right) = \mathbb{R}^3$$

$$\Rightarrow \quad \dim_{\mathbb{R}}(\mathcal{U} + \mathcal{U}') = 3$$

$$\dim_{\mathbb{R}}(\mathcal{U}) + \dim_{\mathbb{R}}(\mathcal{U}') - \dim_{\mathbb{R}}(\mathcal{U} \cap \mathcal{U}') = 2 + 2 - 1$$

Kor. 30.17

Sei $\dim_K V < \infty$, $\mathcal{U}, \mathcal{U}' \leq V$.

Dann sind gleichwertig:

ⓐ $V = \mathcal{U} \oplus \mathcal{U}'$

ⓑ $V = \mathcal{U} + \mathcal{U}'$ und $\mathcal{U} \cap \mathcal{U}' = \{0\}$

ⓒ $V = \mathcal{U} + \mathcal{U}'$ und $\dim_K V = \dim_K \mathcal{U} + \dim_K \mathcal{U}'$

ⓓ $\mathcal{U} \cap \mathcal{U}' = \{0\}$ und $\dim_K V = \dim_K \mathcal{U} + \dim_K \mathcal{U}'$

Beweis: 30.15 + 28.17. $\square$

Bsp. 30.18

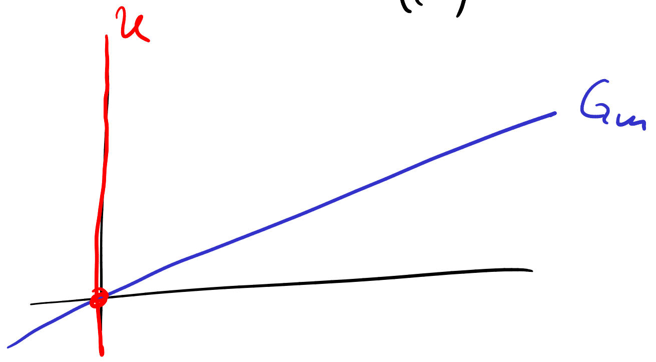
$V = \mathbb{R}^2$, $\mathcal{U} = \mathrm{Lin}\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right) = y$-Achse, G_m = Gerade mit Steigung m durch den Ursprung

$= \mathrm{Lin}\left(\begin{pmatrix}1\\m\end{pmatrix}\right)$

$\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{U} + \dim_{\mathbb{R}} G_m = 1 + 1 = \dim_{\mathbb{R}} V$

$\mathcal{U} \cap G_m = \left\{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right\}$

$\Rightarrow \quad \mathcal{U} \oplus G_m = \mathbb{R}^2$



Kor. 30.19

Sei $\dim_K(V) < \infty$ und $\mathcal{U} \leq V$.

Dann: $\dim_K(V/\mathcal{U}) = \dim_K(V) - \dim_K(\mathcal{U})$

Beweis:

Sei $\mathcal{U}'$ ein Komplement von $\mathcal{U}$ in V

$$\underset{28.36}{\Longrightarrow} \quad V = \mathcal{U} \oplus \mathcal{U}' \quad \text{und} \quad V/\mathcal{U} \cong \mathcal{U}'$$

$$\underset{30.17}{\Longrightarrow} \quad \dim_K(V) = \dim_K(\mathcal{U}) + \dim_K(\mathcal{U}') = \dim_K(\mathcal{U}) + \dim_K(V/\mathcal{U})$$

□

Bemerkung 30.20

Sei V ein K-VR, $\mathcal{U} \leq V$ mit Basis $(x_1, \ldots, x_r)$.

Dann sind für $(y_1, \ldots, y_s)$ gleichwertig:

ⓐ $(x_1, \ldots, x_r, y_1, \ldots, y_s)$ ist eine Basis von V

ⓑ $(y_1, \ldots, y_s)$ ist eine Basis eines Komplements von $\mathcal{U}$

ⓒ $(\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_s)$ ist eine Basis von $V/\mathcal{U}$.

Satz 30.21

Sei $f: V \to W$ linear und $\dim_K(V) < \infty$.

Dann: $\dim_K(V) = \dim_K(\operatorname{Ker}(f)) + \dim_K(\operatorname{Im}(f))$.

Beweis:

$$\text{Homomorphiesatz} \Rightarrow \quad V/\operatorname{Ker}(f) \cong \operatorname{Im}(f)$$

$$\underset{30.19}{\Longrightarrow} \quad \dim_K(V/\operatorname{Ker}(f)) \underset{30.19}{=} \dim_K(V) - \dim_K(\operatorname{Ker}(f))$$

$$\Vert$$

$$\dim_K(\operatorname{Im}(f))$$

□

Bsp. 30.22

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R};\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto x_1 - x_2 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{Ker}(f) = \operatorname{Lin}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \quad \operatorname{Im}(f) = \mathbb{R}$

$\Rightarrow \quad \dim_{\mathbb{R}}(\operatorname{Ker}(f)) = 1, \quad \dim_{\mathbb{R}}(\operatorname{Im}(f)) = 1$

□

D) Bijektivität linearer Abbildungen

Kor. 30.23

Seien V und W zwei VRe mit $\dim_K V = \dim_K W < \infty$
und $f : V \to W$ linear.
Dann sind gleichwertig:
- ⓐ f ist bijektiv
- ⓑ f ist injektiv
- ⓒ f ist surjektiv.

Beweis:

ⓑ ⇒ ⓒ: f injektiv ⇒ $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$

$$\Rightarrow \dim_K W = \dim_K V = \underbrace{\dim_K \mathrm{Ker}(f)}_{=0} + \dim_K \mathrm{Im}(f) = \dim_K \mathrm{Im}(f)$$

⇒ $\mathrm{Im}(f) = W$ ⇒ f ist surjektiv

ⓒ ⇒ ⓑ: f surjektiv ⇒ $\mathrm{Im}(f) = W$

$$\Rightarrow \dim_K(W) = \dim_K(V) = \dim_K \mathrm{Ker}(f) + \underline{\dim_K \mathrm{Im}(f)} = \dim_K \mathrm{Ker}(f) + \dim_K W$$

⇒ $\dim_K \mathrm{Ker}(f) = 0$ ⇒ $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$ ⇒ f ist injektiv.

□

Kor. 30.24

$A, B \in \mathrm{Mat}_n(K)$ mit $A \circ B = \mathbb{1}_n$ ⇒ $B \circ A = \mathbb{1}_n$ und $A \in Gl_n(K)$

Beweis:

$$A \circ B = \mathbb{1}_n \Rightarrow \underset{\displaystyle f_A \circ f_B}{\overset{\shortparallel}{f_{A \circ B}}} = f_{\mathbb{1}_n} = \mathrm{id}_{K^n}$$

⇒ f_A surjektiv ∧ f_B injektiv

⇒ f_A & f_B bijektiv und sie sind invers zueinander

⇒ $f_{\mathbb{1}_n} = \mathrm{id}_{K^n} = f_B \circ f_A = f_{B \circ A}$ ⇒ $B \circ A = \mathbb{1}_n$ □

§ 31 Lineare Abbildungen und Matrizen

GV:
- $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ Basis von V
- $\mathcal{D} = (d_1, \dots, d_m)$ " " W
- $E = (e_1, \dots, e_n)$ kanonische Basis von K^n
- $F = (f_1, \dots, f_m)$ " " " K^m

A) Matrixdarstellung linearer Abbildungen

Def. 31.1 Sei $f : V \longrightarrow W$ K-linear.

ⓐ $x \in V \overset{29.16}{\Longrightarrow} \exists_1\, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in K : x = \lambda_1 \cdot b_1 + \dots + \lambda_n \cdot b_n$

Setze: $M_{\mathcal{B}}(x) := \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \in K^n$ heißt Koordinatenvektor von x bez. $\mathcal{B}$

ⓑ $\forall\, j = 1, \dots, n : \exists_1\, a_{1j}, \dots, a_{mj} \in K : f(b_j) = a_{1j} \cdot d_1 + \dots + a_{mj} \cdot d_m$

Setze: $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{D}}(f) := \begin{pmatrix} \underbrace{\begin{matrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{matrix}}_{\shortparallel \atop M_{\mathcal{B}}(f(b_1))} & \cdots & \underbrace{\begin{matrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{matrix}}_{\shortparallel \atop M_{\mathcal{B}}(f(b_n))} \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(m \times n, K)$ heißt die Matrixdarstellung von f bzt. $\mathcal{B}$ und $\mathcal{D}$

Bsp. 31.2

ⓐ $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in K^n \Longrightarrow M_E(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x$

$$\shortparallel$$

$$x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + x_n \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = x_1 \cdot e_1 + \dots + x_n \cdot e_n$$

ⓑ $V = \mathbb{R}^2$, $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$, $x = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$, $E = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

$$\Longrightarrow x = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \boxed{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \boxed{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow M_{\mathcal{B}}(x) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

ⓒ $V = \mathbb{R}^2$ mit $\mathcal{B} = \Bigg(\overset{b_1}{\overset{\shortparallel}{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}}}, \overset{b_2}{\overset{\shortparallel}{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}} \Bigg)$, $W = \mathbb{R}^3$ mit $\mathcal{D} = \Bigg(\overset{d_1}{\overset{\shortparallel}{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}}, \overset{d_2}{\overset{\shortparallel}{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}}, \overset{d_3}{\overset{\shortparallel}{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}} \Bigg)$

$f : V \longrightarrow W$ linear mit $f(b_1) = 3 \cdot d_1 - 4 \cdot d_2 + 6 \cdot d_3$, $f(b_2) = 3 \cdot d_1 - 3 \cdot d_2 + 4 \cdot d_3$

$$\Longrightarrow M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{D}}(f) = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -4 & -3 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$$

ⓓ $A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}(m \times n, \mathbb{R})$ und $f_A : K^n \to K^m ; x \mapsto A \circ x$

$$\Rightarrow \quad M_F^E(f_A) = A$$

denn: $f_A(e_j) = A \circ e_j = j$-te Spalten von A

$$= a_{1j} \cdot f_1 + \dots + a_{mj} \cdot f_m$$

Bem. 31.3

30. 11 $\Rightarrow \quad \phi_B : V \xrightarrow{\cong} K^n$ mit $\phi_B(x) = M_B(x)$

denn: $\phi_B(b_j) = e_j \quad \Rightarrow \phi_B(x) = \phi_B\left(\sum_{j=1}^n x_j b_j\right) = \sum_{j=1}^n x_j \cdot \phi_B(b_j)$

Wenn $x = \sum_{j=1}^n x_j b_j$

$$M_B(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^n x_j e_j$$

Prop. 31.4

Sei $f : V \to W$ K-linear und $x \in V$.

Dann:
$$\underset{K^m}{\underset{\cap}{M_D(f(x))}} = \underset{\mathrm{Mat}(m \times n, K)}{\underset{\cap}{\underbrace{M_D^B(f)}}} \circ \underset{K^n}{\underset{\cap}{M_B(x)}}$$

Beweis:

Sei $x = \sum_{j=1}^n \lambda_j \cdot b_j$, d.h. $M_B(x) = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$, und $M_D^B(f) = (a_{ij})$

$$\Rightarrow f(x) = f\left(\sum_{j=1}^n \lambda_j \cdot b_j\right) = \sum_{j=1}^n \lambda_j \cdot f(b_j) = \sum_{j=1}^n \lambda_j \cdot \sum_{i=1}^{\overset{m}{\cancel{n}}} a_{ij} \cdot d_i$$

$$= \sum_{i=1}^m \underbrace{\left(\sum_{j=1}^{\overset{n}{\cancel{m}}} \lambda_j \cdot a_{ij}\right)}_{= \boxed{\text{i-te Zeile von } (a_{ij})} \circ \boxed{\begin{matrix}\lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n\end{matrix}}} \cdot d_i$$

$$\Rightarrow M_D(f(x)) = M_D^B(f) \circ M_B(x)$$

□

Bsp. 31.5 $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ mit $M_D^B(f) = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -4 & -3 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$ aus 31.2 ⊙

Sei $x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ $\Rightarrow M_B(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ weil $x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow M_D(f(x)) = M_D^B(f) \circ M_B(x) = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -4 & -3 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow f(x) = 0 \cdot d_1 - 1 \cdot d_2 + 2 \cdot d_3 = 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Satz 30.6

$$\begin{tikzcd} M_D^B : \mathrm{Hom}_K(V,W) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, phantom, sloped, "\ni"] & \mathrm{Mat}(m \times n, K) \arrow[d, phantom, sloped, "\ni"] \\ f \arrow[r, mapsto] & M_D^B(f) \end{tikzcd}$$

Beweis:

Seien $f, g \in \mathrm{Hom}_K(V, W)$ und $\lambda, \mu \in K$

z.z.: $M_D^B(\lambda f + \mu g) = \lambda \cdot M_D^B(f) + \mu \cdot M_D^B(g)$

Sei $M_D^B(f) = (a_{ij})$, $M_D^B(g) = (b_{ij})$

$$\Rightarrow (\lambda f + \mu g)(b_j) = \lambda \cdot f(b_j) + \mu \cdot g(b_j) = \lambda \cdot \sum_{i=1}^m a_{ij} \cdot d_i + \mu \cdot \sum_{i=1}^m b_{ij} \cdot d_i$$

$$= \sum_{i=1}^m (\lambda \cdot a_{ij} + \mu \cdot b_{ij}) \cdot d_i$$

$$\Rightarrow M_D^B(\lambda f + \mu g) = \lambda \cdot (a_{ij}) + \mu \cdot (b_{ij})$$

Also: M_D^B ist linear!

z.z.: M_D^B ist bijektiv.

Sei $A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}(m \times n, K)$ beliebig.

$\overset{}{\underset{29.18}{\Longrightarrow}}$ $\exists_1$ lin. Abb. $f: V \to W$ mit $f(b_j) = \sum_{i=1}^m a_{ij} \cdot d_i$ für $j = 1, \dots, n$

$\Rightarrow \exists_1 f \in \mathrm{Hom}_K(V, W)$ mit $M_D^B(f) = A$. $\square$

Bem. 31.7

$f \in \mathrm{Hom}_K(K^n, K^m) \Rightarrow A_f \in \mathrm{Mat}(m\times n, K)$ mit j-ter Spalte $f(e_j)$ für $j = 1, \dots, n$

$$\Rightarrow \quad \begin{array}{rcl} M^E_F : \mathrm{Hom}_K(K^n, K^m) & \xrightarrow{\cong} & \mathrm{Mat}(m\times n, K) \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ f & \longmapsto & A_f \end{array}$$

hat die Inverse

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Mat}(m\times n, K) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_K(K^n, K^m) \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ A & \longmapsto & f_A \end{array}$$

Lemma 31.8

Sei $f \in \mathrm{Hom}_K(U, V)$ und $g \in \mathrm{Hom}_K(V, W)$, B, C, D Basen von $\underset{n}{U}, \underset{m}{V}, \underset{\ell}{W}$.

Dann: $$M^B_D(g\circ f) = \underset{\mathrm{Mat}(\ell\times m, K)}{\underset{\cap}{M^C_D(g)}} \circ \underset{\mathrm{Mat}(m\times n, K)}{\underset{\cap}{M^B_C(f)}}$$

Beweis:

Sei $B = (b_1, \dots, b_n) \Rightarrow M_B(b_j) = e_j$

$$\Rightarrow \underbrace{M^B_D(g\circ f)\circ e_j}_{j\text{-te Spalte von } M^B_D(g\circ f)} = M^B_D(g\circ f)\circ M_B(b_j) \overset{31.4}{=} M_D((g\circ f)(b_j))$$

$$\| $$

$$M_D(g(f(b_j)))$$

$$\| \, 31.4$$

$$M^C_D(g)\circ\left(M^B_C(f)\circ M_B(b_j)\right) \overset{31.4}{=} M^C_D(g)\circ M_C(f(b_j))$$

$$\|$$

$$\left(M^C_D(g)\circ M^B_C(f)\right)\circ \underbrace{M_B(b_j)}_{=e_j} = j\text{-te Spalte von } M^C_D(g)\circ M^B_C(f)$$

$\square$

Bem. 31.9

Sei V eine nicht-leere Menge mit Operationen

$$+ : V \times V \longrightarrow V$$
$$\cdot : K \times V \longrightarrow V$$
$$\circ : V \times V \longrightarrow V$$

so, dass:

① $(V, +, \cdot)$ ist K-VR

② $(V, +, \circ)$ ist Ring mit 1

③ $\lambda \cdot (v \circ x) = (\lambda \cdot v) \circ x = v \circ (\lambda \cdot x) \quad \forall \lambda \in K,\ x, v \in V$

Dann heißt $(V, +, \circ, \cdot)$ eine K-Algebra.

Eine Abb. $f : V \longrightarrow W$ zwischen zwei K-Algebren heißt ein K-Algebrenisomorphismus, wenn

$$\left.\begin{aligned} &\cdot\ f(x+y) = f(x) + f(y) \\ &\cdot\ f(x \circ y) = f(x) \circ f(y) \\ &\cdot\ f(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot f(x) \end{aligned}\right\} \forall x, y \in V,\ \lambda \in K$$

- $f(1_V) = 1_W$
- f ist bijektiv

Kor. 31.10

$f, g \in End_K(V) = Hom_K(V, V)$

$$\Longrightarrow \quad M^B_B(g \circ f) = M^B_B(g) \circ M^B_B(f)$$

$\Longrightarrow \quad M^B_B : End_K(V) \longrightarrow Mat_n(K)$ ist ein K-Algebrenisomorphismus

Insbesondere: $(End_K(V), +, \circ, \cdot)$ und $(Mat_n(K), +, \circ, \cdot)$ sind K-Algebren!

B) Basiswechsel

Definition 31.11

Seien $B=(b_1,\dots,b_n)$ und $B'=(b_1',\dots,b_n')$ Basen von V.

Dann: $b_j = a_{1j}\cdot b_1' + \dots + a_{nj}\cdot b_n'$

Setze: $T^{B}_{B'} := \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \in Mat_n(K)$ heißt Basiswechsel bezüglich (B, B')

$$\shortparallel$$

$$M^{B}_{B'}(id_V)$$

Lemma 31.13

Es gilt: $\left(T^{B}_{B'}\right)^{-1} = T^{B'}_{B} \in Gl_n(K)$

Beweis:

$$T^{B'}_{B} \circ T^{B}_{B'} = M^{B'}_{\underline{B}}(id_V) \circ M^{B}_{B'}(id_V) = M^{B}_{B}(id_V \circ id_V) = M^{B}_{B}(id_V)$$

$$\shortparallel$$

$$\mathbb{1}_n$$

$\Rightarrow T^{B}_{B'} \in Gl_n(K)$ und $\left(T^{B}_{B'}\right)^{-1} = T^{B'}_{B}$

$\square$

Satz 31.14

Seien B & B' Basen von V, D & D' Basen von W und $f \in Hom_K(V, W)$.

Dann: $M^{B'}_{D'}(f) = T^{D}_{D'} \circ M^{B}_{D}(f) \circ T^{B'}_{B}$

Beweis:

$$T^{D}_{D'} \circ M^{B}_{D}(f) \circ T^{D'}_{B} = M^{D}_{D'}(id_W) \circ M^{B}_{D}(f) \circ M^{B'}_{B}(id_V)$$

$$= M^{B'}_{D'}(id_W \circ f \circ id_V) = M^{B'}_{D'}(f)$$

$\square$

Bsp. 31.26 $\quad V=\mathbb{R}^2,\ W=\mathbb{R}^3,\ B=\left(\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right),\ D=\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$

$f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}^3$ mit $M^B_D(f)=\begin{pmatrix}3&3\\-4&-3\\6&4\end{pmatrix}$

Ziel! Bestimme $M^E_F(f)=:A$, dann: $f=f_A$

D.h. $\quad M^E_F(f) = T^D_F\circ M^B_D(f)\circ T^E_B$

① Bestimme T^D_F

$$T^D_F = M^D_F(id_{\mathbb{R}^3}) = \begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}$$

$\uparrow$ Spalten = Basisv. D

② Bestimme T^E_B

· $T^B_E=\begin{pmatrix}1&1\\2&1\end{pmatrix} \Rightarrow T^E_B = \left(T^B_E\right)^{-1}$

$$= \begin{pmatrix}1&1\\2&1\end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{1\cdot1-2\cdot1}\cdot\begin{pmatrix}1&-1\\-2&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1&1\\2&-1\end{pmatrix}$$

③ $M^E_F(f) = \begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}3&3\\-4&-3\\6&4\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}-1&1\\2&-1\end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix}3&0\\1&-1\\0&1\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow f\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3&0\\1&-1\\0&1\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3x_1\\x_1-x_2\\x_2\end{pmatrix}$$

C) Rang von Matrizen

Def. 31.17

ⓐ $f\in Hom_K(V,W) \Rightarrow$ $rang(f):=dim_K(Im(f))$ heißt Rang von f

ⓑ $A\in Mat(m\times n,K) \Rightarrow$ $rang(A):=rang(f_A)$

$$=dim_K\left(Lin(a^1,\dots,a^n)\right)$$

$\uparrow$ Spalten von A

= maximale Anzahl an lin.-unabhängigen Spalten in A

Bem. 31.18

ⓐ $f \in \operatorname{Hom}_K(V,W) \implies \operatorname{rang}(f) = \underset{\underset{\dim_K(W)}{\wedge\!\vert}}{\dim_K \operatorname{Im}(f)} = \underset{\underset{\dim_K(V)}{\wedge\!\vert}}{\dim_K V} - \dim_K \operatorname{Ker}(f)$

$\implies \operatorname{rang}(f) \leq \min\{\dim_K(V), \dim_K(W)\}$

ⓑ $A \in \operatorname{Mat}(m \times n, K) \implies \operatorname{rang}(A) \leq \min\{n, m\}$

Bsp. 31.19

$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$, $\operatorname{rang}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 1$, $\operatorname{rang}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2$

Satz 31.20

$A \in \operatorname{Mat}_n(K)$ ist invertierbar $\iff \operatorname{rang}(A) = n$

Insbesondere: die Spalten einer invertierbaren Matrix sind eine Basis des K^n.

Beweis:

A invertierbar $\iff f_A : K^n \to K^n$ ist bijektiv

$\underset{30.23}{\iff} f_A$ ist surjektiv $\iff \operatorname{Im}(f_A) = K^n$

$\iff \underset{\underset{n}{\shortparallel}}{\dim_K(K^n)} = \dim_K \operatorname{Im}(f_A) = \operatorname{rang}(f_A) = \operatorname{rang}(A)$

□

Prop. 31.21

$f \in \operatorname{Hom}_K(V,W) \implies \operatorname{rang}(f) = \operatorname{rang}(M_D^B(f))$

Beweis:

$f_{M_D^B(f)} = \Phi_D \circ f \circ \Phi_B^{-1}$

$$\begin{tikzcd}
x \arrow[d, mapsto] & \in & V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\Phi_B"', shift right] & W \arrow[d, "\Phi_D"] & \ni y = f(x) \\
M_B(x) & \in & K^n \arrow[r, "f_{M_D^B(f)}"'] \arrow[u, "\Phi_B^{-1}"', shift right] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowright"] & K^m & \ni M_D(y) = M_D(f(x))
\end{tikzcd}$$

$$\Rightarrow \quad \operatorname{rang}\left(M^B_D(f)\right) = \dim_K\left(\operatorname{Im}\left(f_{M^B_D(f)}\right)\right) = \dim_K\left(\operatorname{Im}(\phi_D \circ f \circ \phi_B^{-1})\right)$$

$$= \dim_K\left(\phi_D\left(f\left(\underbrace{\phi_B^{-1}(K^n)}_{=V}\right)\right)\right) = \dim_K\left(\phi_D(f(V))\right)$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \phi_D \text{ Isom.}}}{=} \dim_K\left(f(V)\right) = \dim_K\left(\operatorname{Im}(f)\right) = \operatorname{rang}(f) \qquad \square$$

Bsp. 31.22

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ aus Bsp. 31.2,

d.h. $M^B_D(f) = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -4 & -3 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ $\operatorname{rang}(f) = \operatorname{rang}\left(M^B_D(f)\right) = 2$

Satz 31.23

Sei $f : V \to W$ linear mit $\operatorname{rang}(f) = r$.

Dann: $\exists$ B Basis von V, D Basis von W so, dass

$$M^B_D(f) = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{1}_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$$

Beweis:

Wähle ein Komplement U von $\operatorname{Ker}(f)$ in V

$$\Rightarrow \quad \begin{tikzcd} U \arrow[r, "\cong"] \arrow[rr, bend right=40, "f_{|U}"', "\cong"] & V/_{\operatorname{Ker}(f)} \arrow[r, "\cong"] & \operatorname{Im}(f) \\ x \arrow[u, phantom, "\in"] \arrow[r, mapsto] & \bar{x} \arrow[u, phantom, "\in"] \arrow[r, mapsto] & f(x) \arrow[u, phantom, "\in"] \end{tikzcd}$$

Sei $(d_1, \dots, d_r)$ eine Basis von $\operatorname{Im}(f)$. Setze: $b_i := \left(f_{|U}\right)^{-1}(d_i)$

$\Rightarrow$ $(b_1, \dots, b_r)$ eine Basis von U. Sei $(b_{r+1}, \dots, b_n)$ Basis von $\operatorname{Ker}(f)$

$\Rightarrow B = (b_1, \dots, b_n)$ ist Basis von V. Ergänze $(d_1, \dots, d_r)$ zu Basis D von W

$\Rightarrow$ $f(b_j) = \begin{cases} d_j, & j = 1, \dots, r \\ 0, & j = r+1, \dots, n \end{cases}$ $\Rightarrow$ $M^B_D(f) = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{1}_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$ $\square$

Kor. 31.24

$A \in \mathrm{Mat}(m \times n, K)$ mit $\mathrm{rang}(A) = r$

$\Longrightarrow \exists\ S \in Gl_m(K),\ T \in Gl_n(K)$:

$$S \circ A \circ T = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{1}_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$$

Beweis:

31.23 $\Longrightarrow \exists\ B$ Basis von K^n, D Basis von K^m;

$$M^B_D(f_A) = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{1}_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$/\!/$$

$$T^F_D \circ M^E_F(f_A) \circ T^B_E = \underbrace{T^E_D}_{\overset{\|}{\underset{\cdot\cdot}{}} S} \circ A \circ \underbrace{T^B_E}_{\overset{\|}{\underset{\cdot\cdot}{}} T}$$

□

Kor. 31.25

ⓐ Sei $A \in \mathrm{Mat}_n(K)$.

Dann: A ist invertierbar $\Longleftrightarrow$ A^t ist invertierbar

ⓑ Sei $A \in \mathrm{Mat}(m \times n, K)$.

Dann: $\mathrm{rang}(A) = \mathrm{rang}(A^t)$.

$\|$ max. Anzahl lin. unabh. Spalten von A

$\|$ max. Anzahl lin. unabhängiger Zeilen von A

Beweis:

ⓐ "$\Rightarrow$" A invertierbar $\Rightarrow \exists\ B \in \mathrm{Mat}_n(K)$; $B \circ A = \mathbb{1}_n = A \circ B$

$$\Rightarrow \underset{\overset{\|}{B^t \circ A^t}}{(A \circ B)^t} = \underset{\overset{\|}{\mathbb{1}_n}}{\mathbb{1}_n^t} = \underset{\overset{\|}{A^t \circ B^t}}{(B \circ A)^t}$$

$\Rightarrow$ A^t ist invertierbar

"$\Leftarrow$" analog.

ⓑ $r = \operatorname{rang}(A) \overset{}{\underset{31.24}{\Longrightarrow}} \exists\ S \in GL_m(K),\ T \in GL_n(K) : S \circ A \circ T = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{1}_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$

$$\Rightarrow \quad (S \circ A \circ T)^t = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{1}_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)^t \begin{array}{l} \}\, r \\ \}\, m-r \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} \underbrace{\quad}_{r} & \underbrace{\quad}_{n-r} \end{array}$$

$$\mathbin{/\!/} \qquad\qquad \|$$

$$T^t \circ A^t \circ S^t \qquad \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{1}_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \}\, r \\ \}\, n-r \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} \underbrace{\quad}_{r} & \underbrace{\quad}_{m-r} \end{array}$$

$$\Rightarrow \quad \operatorname{rang}(T^t \circ A^t \circ S^t) = r$$

$$\|$$

$$\operatorname{rang}(A^t) \qquad\qquad \square$$

Multiplikation mit invertierbaren Matrizen ändert den Rang nicht!

Bsp. 31.26

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

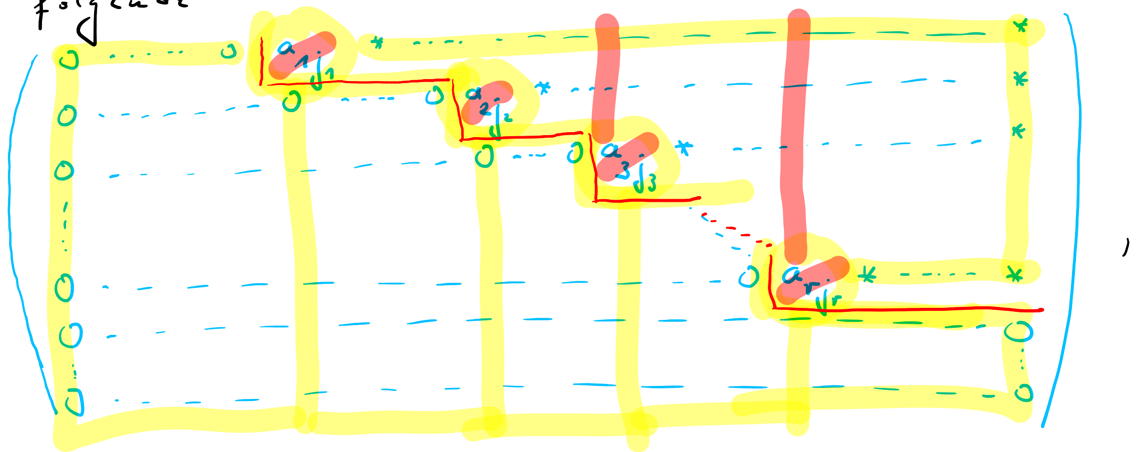
$$\operatorname{rang}(A) = 3 = \operatorname{rang}(A^t)$$

§ 32 Der Gauß-Algorithmus

Def. 32.1

Eine Matrix $A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}(m \times n, K)$ ist in Zeilen-Stufen-Form (kurz ZSF), wenn sie folgende Gestalt hat:

$A =$



,

wobei $a_{1j_1}, \dots, a_{rj_r} \neq 0$ heißen die Pivot-Elemente von A.

Beachte: $\mathrm{rang}(A) = r$

Eine ZSF von A heißt reduziert, wenn die Pivots alle 1 sind und in den Spalten oberhalb der Pivots nur 0 steht.

Bsp. 32.3

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(4 \times 5, \mathbb{R})$$

ist in reduzierter ZSF ($\mathrm{rang}(A) = 3$)

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(4 \times 5, \mathbb{R})$$

ist in ZSF, aber nicht reduziert ($\mathrm{rang}(A) = 4$)

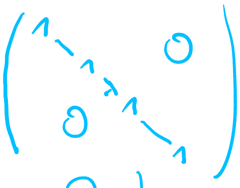
$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(4 \times 5, \mathbb{R})$$

ist nicht in ZSF

ABER: tausche 1. & 2. Zeile, dann ist die Matrix in ZSF !!!

Def. 32.4 Sei $\overset{\neq 0}{\lambda} \in K$, $1 \leq i, j \leq n$ mit $i \neq j$.

ⓐ $S_i(\lambda) := \mathbb{1}_n + (\lambda - 1) \cdot E_i^i =$

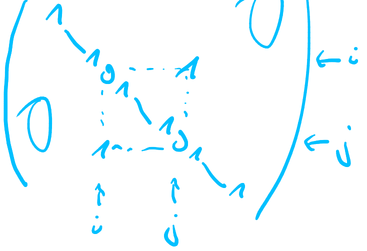


$\in \mathrm{Mat}_n(K)$

ⓑ $Q_i^j(\lambda) := \mathbb{1}_n + \lambda \cdot E_i^j =$

$\in \mathrm{Mat}_n(K)$

ⓒ $P_i^j := \mathbb{1}_n - E_i^i - E_j^j + E_i^j + E_j^i =$



$\in \mathrm{Mat}_n(K)$

↖ Permutationsmatrizen.

Sie heißen Elementarmatrizen.

Bem. 32.5 (Elementare Zeilen- und Spaltenoperationen) $A \in Mat(m \times n, K)$

Ⓘ $S_i(\lambda) \circ A$ geht aus A hervor, indem die i-te Zeile mit λ multipliziert wird.

Ⓘ̈ (II) $Q_i^j(\lambda) \circ A$ geht aus A hervor, indem zur i-ten Zeile das λ-fache der j-ten Zeile addiert wird.

(III) $P_i^j \circ A$ geht aus A hervor, indem die i-te und j-te Zeile vertauscht werden

↑ elementare Zeilenoperationen

(I') $A \circ S_i(\lambda)$ geht aus A vvor, indem die i-te Spalte mit λ multipliziert wird.

(II') $A \circ Q_i^j(\lambda)$ geht aus A hervor, indem zur j-ten Spalte das λ-fache der i-ten addiert wird

(III') $A \circ P_i^j$ geht aus A hervor, indem die i-te und j-te Spalte vertauscht werden

↑ elementare Spaltenoperationen

Prop. 32.6

ⓐ $S_i(\frac{1}{\lambda}) \circ S_i(\lambda) = \mathbb{1}_n$

ⓑ $Q_i^j(-\lambda) \circ Q_i^j(\lambda) = \mathbb{1}_n$

ⓒ $P_i^j \circ P_i^j = \mathbb{1}_n$

$\Rightarrow$ Elementarmatrizen sind invertierbar!

Beweis: nachrechnen. □

Satz 32.7

Jede Matrix $A \in Mat(m \times n, K)$ kann durch endlich viele elementare Zeilenoperationen in reduzierte ZSF überführt werden,

d.h. $\exists$ Elementarmatrizen $T_1, \dots, T_k$, s.d. $\boxed{T_1 \circ \dots \circ T_k \circ A = rZSF(A)}$

Bem. 32.8:

Die reduzierte ZSF einer Matrix A ist eindeutig und wir schreiben dafür $rZSF(A)$.

Bsp. 32.9

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & -3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \xmapsto{I \leftrightarrow II} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \xmapsto{III \mapsto III + I} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\xmapsto{III \mapsto III + (-2) \cdot II} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xmapsto[\substack{I \mapsto (-1) \cdot I \\ II \mapsto (-1) \cdot II \\ III \mapsto (-1) \cdot III}]{} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & \boxed{-3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xmapsto[\substack{II \mapsto II + 3 \cdot III \\ I \mapsto I + 2 \cdot III}]{}$$

hat ZSF

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[I \mapsto I + (-3)\cdot II]{} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = rZSF(A)$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & -3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[I \leftrightarrow III]{} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 4 & 3 \\ -1 & 1 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[II \mapsto II + I]{} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[II \leftrightarrow III]{} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 4 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[III \mapsto III + (-2)\cdot II]{} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{II \mapsto (-1)\cdot II \\ III \mapsto (-1)\cdot III}]{} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{II \mapsto II + 3\cdot III \\ I \mapsto I + (-3)\cdot III}]{} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[I \mapsto I + (-1)\cdot II]{} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = rZSF(A)$$

Also: $\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(rZSF(A)) = 3$

Lemma 32.11

Elementare Zeilen- und Spaltenoperationen ändern den Rang nicht.

Satz 32.14 Sei $A \in Mat_n(K)$.

Dann sind gleichwertig:

ⓐ A ist invertierbar ⓑ $rZSF(A) = \mathbb{1}_n$

ⓒ $\exists$ Elementarmatrizen $T_1, \dots, T_k$: $T_k \circ \dots \circ T_1 \circ A = \mathbb{1}_n$

ⓓ $\exists$ " $T_1', \dots, T_k'$: $A = T_1' \circ \dots \circ T_k'$

Insbesondere, die Elementarmatrizen erzeugen die $GL_n(K)$.

Beachte:

$$\overbrace{T_k \circ \dots \circ T_1}^{= A^{-1}} \circ A = \mathbb{1}_n \qquad (\mathbb{1}_n \mid A^{-1})$$

$$\Rightarrow T_k \circ \dots \circ T_1 \circ \underbrace{(A \mid \mathbb{1}_n)}_{\in Mat(n \times 2n, K)} = (\underbrace{T_k \circ \dots \circ T_1 \circ A}_{= \mathbb{1}_n} \mid T_k \circ \dots \circ T_1 \circ \mathbb{1}) = (\mathbb{1}_n \mid T_k \circ \dots \circ T_1)$$

Bsp. 32.16 Invertieren $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{R})$

$$\begin{array}{ccc|ccc|l}
 & A & & & \mathbb{1}_3 & & \\
\hline
1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & \\
0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & \\
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & \mathrm{III} \mapsto \mathrm{III} - \mathrm{I} \\
\hline
1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & \\
0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & \\
0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & \mathrm{III} \mapsto \mathrm{III} + \mathrm{II} \\
\hline
1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & \mathrm{I} \mapsto \mathrm{I} - \mathrm{III} \\
0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & \mathrm{II} \mapsto \mathrm{II} - \mathrm{III} \\
0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & \\
\hline
1 & 1 & 0 & 2 & -1 & -1 & \mathrm{I} \mapsto \mathrm{I} - \mathrm{II} \\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & \\
0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & \\
\hline
1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & \\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & = A^{-1} \\
0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 &
\end{array}$$

$$\Rightarrow A^{-1} \circ A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Kor. 32.17

A lässt sich durch elementare Zeilen- und Spaltenoperationen in Normalform $\left(\begin{array}{c|c} \mathbb{1}_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$ mit $r = \mathrm{rang}(A)$ überführen.

Bsp. 32.18

$$\begin{array}{ccc|ccc|ccc|l}
\multicolumn{3}{c|}{\text{Zeilenop.} \to \mathbb{1}_3} & & A & & \multicolumn{3}{c|}{\mathbb{1}_3 \leftarrow \text{Spaltenoperationen}} & \\
\hline
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & \\
0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & Z: \mathrm{III} \mapsto \mathrm{III} + \mathrm{I} \\
\hline
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & S: \mathrm{III} \mapsto \mathrm{III} + \mathrm{I} \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & \\
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \\
\hline
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & \\
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \\
\hline
\multicolumn{3}{c|}{= S} & \multicolumn{3}{c|}{\text{Normalform von } A} & \multicolumn{3}{c|}{= T} &
\end{array}$$

$$\Rightarrow S \circ A \circ T = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Bsp. 32.21

$$\mathcal{U} = \mathrm{Lin}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\1\\4\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\-4\\-4\\0\end{pmatrix}\right) \leq \mathbb{R}^5$$

Berechne eine Basis von $\mathcal{U}$!

Schreibe die Vektoren als Zeilen in eine Matrix und berechne eine ZSF:

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & 2 & 3\\ 1 & -1 & 1 & 4 & 3\\ 0 & 2 & -4 & -4 & 0\end{pmatrix} \xmapsto[\mathrm{II} \mapsto \mathrm{II}-\mathrm{I}]{} \begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & 2 & 3\\ 0 & -1 & 2 & 2 & 0\\ 0 & 2 & -4 & -4 & 0\end{pmatrix} \xmapsto[\mathrm{III} \mapsto \mathrm{III}+2\cdot\mathrm{II}]{} \begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & 2 & 3\\ 0 & -1 & 2 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\mathcal{U} = \mathrm{Lin}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-1\\2\\2\\0\end{pmatrix}\right)} \quad \text{hat Basis} \quad \left(\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-1\\2\\2\\0\end{pmatrix}\right)$$

Bem. 32.22

$$A \in \mathrm{Mat}(m\times n, K) \Rightarrow f_A : K^n \longrightarrow K^m, \; x \longmapsto A\cdot x$$

$$\Rightarrow \quad \dim_K \mathrm{Ker}(f_A) = \dim_K K^n - \dim_K \mathrm{Im}(f_A) = n - \mathrm{rang}(A)$$

Damit:

- f_A ist injektiv $\Leftrightarrow$ $\mathrm{rang}(A) = n$
- f_A ist surjektiv $\Leftrightarrow$ $\mathrm{rang}(A) = m$
- f_A ist bijektiv $\Leftrightarrow$ $\mathrm{rang}(A) = n = m$

Bsp. 32.24

$f_A : \mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ mit

$$A = \begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & 2 & 3\\ 1 & -1 & 1 & 4 & 3\\ 0 & 2 & -4 & -4 & 0\end{pmatrix} \xmapsto[\text{Gauß}]{} \begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & 2 & 3\\ 0 & -1 & 2 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{r}3\\ \vee\\ \mathrm{rang}(A) = 2\\ \wedge\\ 5\end{array}$$

$\Rightarrow$ f_A nicht injektiv, nicht surjektiv.

§ 33 Lineare Gleichungssysteme

Def. 33.1

ⓐ Ein lineares Gleichungssystem über K

$$(\mathrm{LGS}) \quad \begin{array}{ccccccc} a_{11}\cdot x_1 & + & a_{12}\cdot x_2 & + \cdots + & a_{1n}\cdot x_n & = & b_1 \\ a_{21}\cdot x_1 & + & a_{22}\cdot x_2 & + \cdots + & a_{2n}\cdot x_n & = & b_2 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ a_{m1}\cdot x_1 & + & a_{m2}\cdot x_2 & + \cdots + & a_{mn}\cdot x_n & = & b_m \end{array}$$

besteht aus m Gleichungen in n Unbekannten $x_1, \ldots, x_n$ mit Koeffizienten $a_{ij}, b_i \in K$.

Wenn $A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}(m\times n, K)$, $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in K^m$ und $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

dann hat (LGS) die Form: $\boxed{A \circ x = b}$

ⓑ $A = (a_{ij})$ heißt die Koeffizientenmatrix von $A\cdot x = b$,

$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ heißt die Inhomogenität von $A\circ x = b$,

$$(A\,|\,b) = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right) \in \mathrm{Mat}(m\times(n+1), K)$$

heißt die erweiterte Koeffizientenmatrix von $A\circ x = b$

ⓒ (LGS) heißt homogen $:\Longleftrightarrow$ $b = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

Sonst heißt (LGS) inhomogen.

ⓓ $A\circ x = 0$ heißt das zu $A\circ x = b$ gehörende homogene LGS.

ⓔ $c = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \in K^n$ heißt Lösung von $A\circ x = b$ $:\Longleftrightarrow$ $A\circ c = b$

Setze: $\mathrm{Lös}(A,b) := \{c\in K^n \mid A\circ c = b\}$ = Lösungsraum von $A\circ x = b$

Bem. 33.2 $A \in \mathrm{Mat}(m\times n, K)$, $b \in K^m$

ⓐ $\mathrm{Lös}(A,0) = \{c \in K^n \mid \underbrace{A\circ c}_{=f_A(c)} = 0\} = \mathrm{Ker}(f_A) \leq K^n$

$$\Longrightarrow \quad \dim_K \mathrm{Lös}(A,0) = \dim_K \mathrm{Ker}(f_A) = n - \mathrm{rang}(A)$$

(b) $A\cdot x = b$ hat eine Lösung

$\iff \exists\, c \in K^n : \; b = A\cdot c = f_A(c) \in \mathrm{Im}(f_A)$

$\iff b \in \mathrm{Im}(f_A)$

Bsp. 33.3

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 1 \\ 2\cdot x_1 + 3x_2 \phantom{{}+x_3} &= 1 \\ x_2 - x_3 &= 0 \end{aligned} \implies A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\implies x_3 = x_2 \overset{\frac{1}{3}}{=}, \quad x_1 = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}\cdot x_2 = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{3} = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\cdot x_2\right) + 2x_2 + x_2 = 1 \\ \qquad\qquad \parallel \\ \frac{1}{2} + \frac{3}{2}x_2 \end{array}\right\} \implies \frac{3}{2}x_2 = \frac{1}{2} \implies x_2 = \frac{1}{3}$$

Also: $\mathrm{Lös}(A,b) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} \right\}$

Satz 33.4

$A\cdot x = b$ ist lösbar $\iff \mathrm{rang}(A) = \mathrm{rang}(A|b)$

Beweis:

$A\cdot x = b$ ist lösbar $\iff b \in \mathrm{Im}(f_A) = \mathrm{Lin}(a^1,\dots,a^n)$

$\iff b$ ist eine Linearkombination von $a^1,\dots,a^n$

$\iff \mathrm{Im}(f_A) = \mathrm{Lin}(a^1,\dots,a^n) = \mathrm{Lin}(a^1,\dots,a^n,b) = \mathrm{Im}(f_{A|b})$

$\iff \mathrm{rang}(A) = \mathrm{rang}(A|b)$ ∎

Satz 33.5

$A\cdot c = b \implies \mathrm{Lös}(A,b) \overset{?}{=} \{c + y \mid y \in \mathrm{Lös}(A,0)\} = c + \mathrm{Lös}(A,0)$

ist ein affiner Raum

Beweis:

"⊇" $A\circ y = 0 \Rightarrow A\circ(c+y) = A\circ c + A\circ y = b + 0 = b$

$\Rightarrow c+y \in \text{Lös}(A,b)$

"⊆" $z \in \text{Lös}(A,b) \Rightarrow y := z - c \Rightarrow A\circ y = A\circ z - A\circ c = b - b = 0$

$\Rightarrow y \in \text{Lös}(A,0)$ und $z = c + (z-c) = c + y$

□

Lemma 33.6

$(A'|b')$ geht aus $(A|b)$ hervor durch elementare Zeilenoperationen

$$\Rightarrow \text{Lös}(A',b') \overset{?}{=} \text{Lös}(A,b)$$

D.h. elementare Zeilenoperationen ändern die Lösungsmenge eines LGS nicht!

Beweis

Beachte: Vor. $\Rightarrow \exists\, S \in Gl_m(K): S\circ(A|b) = (A'|b')$

"⊇" $c \in \text{Lös}(A|b) \Rightarrow A\circ c = b \Rightarrow \underset{\substack{\| \\ A'\circ c}}{S\circ A\circ c} = \underset{\substack{\| \\ b'}}{S\circ b}$

$\Rightarrow c' \in \text{Lös}(A',b')$

"⊆" $c \in \text{Lös}(A|b) \Rightarrow \underset{\substack{\| \\ S\circ A\circ c}}{A'\circ c} = b' = S\circ b$

$\Rightarrow \underset{\substack{\| \\ A\circ c}}{S^{-1}\circ S\circ A\circ c} = S^{-1}\circ S\circ b = b \Rightarrow c \in \text{Lös}(A,b)$

□

Bsp. 33.10

Löse:

$$\begin{vmatrix} x_1 + x_2 + x_3 - 2\cdot x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 = -1 \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 - 4\cdot x_4 = 1 \end{vmatrix}$$

① Stelle erweiterte Koeffizientenmatrix auf und bestimme die rZSF

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 3 & 3 & 1 & -4 & 1 \end{array}\right) \xmapsto[\text{III} \mapsto 3\cdot\text{I}]{\text{II}\mapsto\text{II}-\text{I}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & -2 \end{array}\right) \xmapsto[\text{III}\mapsto\text{III}-\text{II}]{} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

rang(A) = 2 = rang(A|b)

$$\xmapsto[\text{II}\mapsto -\frac{1}{2}\cdot\text{II}]{} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xmapsto[\text{I}\mapsto\text{I}-\text{II}]{} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = \text{rZSF}(A)$$

② Füge so viele Nullzeilen ein, dass alle Pivots auf der Diagonalen stehen

$$\longmapsto \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Streiche ggf. Nullzeilen am Ende oder füge welche ein, so dass die vordere Matrix quadratisch wird!

③ Ersetze die Nullen auf der Diagonale durch −1:

$$\longmapsto \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

ist die allgemeine Lösung

✓ Basis von Lös(A, 0)

= c = spezielle Lösung von Ax = b

Also: $\text{Lös}(A, b) = c + \text{Lös}(A, 0)$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \text{Lin}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

Bsp. 33.12 Berechne $\mathrm{Ker}(f_A)$ für $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow f_A : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

Beachte: $\mathrm{Ker}(f_A) = \{ x \in \mathbb{R}^4 \mid 0 = f_A(x) = A \circ x \} = \mathrm{Lös}(A,0)$

① Erweiterte Koeffizientenmatrix für $A \circ x = 0$, berechne rZSF:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\underline{III} \mapsto \underline{III} - \underline{I}]{} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\underline{III} \mapsto \underline{III} + 2 \cdot \underline{II}]{} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\underline{III} \mapsto \frac{1}{6} \cdot \underline{III}]{} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{\underline{I} \mapsto \underline{I} - \underline{III} \\ \underline{II} \mapsto \underline{II} - 3 \cdot \underline{III}}]{} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\underline{I} \mapsto \underline{I} - 2 \cdot \underline{II}]{}$$

$$\longmapsto \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) = \mathrm{rZSF}(A|0)$$

② Füge Nullzeilen und streiche ggf. welche

$$\longmapsto \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

③ Diagonalelemente, die 0 sind in -1 ändern

$$\longmapsto \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \underset{\substack{\| \\ \mathrm{Ker}(f_A)}}{\mathrm{Lös}(A,0)} = \mathrm{Lin}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

Bsp. 33.14 Berechne $\underset{\substack{\| \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}}}{T^{B}_{B'}}$ für $B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$, $B' = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$

d.h. $a \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + c \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$b \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + d \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$
\begin{array}{cc|cc|l}
\multicolumn{2}{c|}{B'} & \multicolumn{2}{c|}{B} & \\
\hline
1 & -1 & 1 & 1 & \\
2 & 0 & 1 & -1 & \mathrm{II} \mapsto \mathrm{II} - 2\cdot \mathrm{I} \\
\hline
1 & -1 & 1 & 1 & \\
0 & 2 & -1 & -3 & \mathrm{II} \mapsto \frac{1}{2}\cdot \mathrm{II} \\
\hline
1 & -1 & 1 & 1 & \mathrm{I} \mapsto \mathrm{I} + \mathrm{II} \\
0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & \\
\hline
1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \\
0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & \\
\hline
\multicolumn{2}{c|}{\mathbb{1}_2} & \multicolumn{2}{c|}{\overset{\shortparallel}{T^{B}_{B'}}} &
\end{array}
$$

<u>Bsp. 33.16</u>

$$f : K^3 \longrightarrow K^2 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x+y+z \\ x-z \end{pmatrix}, \quad B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$D = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

<u>Berechne:</u> $M^B_D(f)$

$$
\begin{array}{cc|ccc|l}
\multicolumn{2}{c|}{D} & \multicolumn{3}{c|}{f(B)} & \\
\hline
1 & 1 & 2 & 2 & 1 & \\
1 & -1 & 0 & 1 & -1 & \mathrm{II} \mapsto \mathrm{II} - \mathrm{I} \\
\hline
1 & 1 & 2 & 2 & 1 & \\
0 & -2 & -2 & -1 & -2 & \mathrm{II} \mapsto (-\frac{1}{2})\cdot \mathrm{II} \\
\hline
1 & 1 & 2 & 2 & 1 & \mathrm{I} \mapsto \mathrm{I} - \mathrm{II} \\
0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} & 1 & \\
\hline
\begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix} & \multicolumn{3}{c|}{\boxed{\begin{matrix} 1 & \frac{3}{2} & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 1 \end{matrix}}} & \\
\hline
\multicolumn{2}{c|}{\mathbb{1}_2} & \multicolumn{3}{c|}{\overset{\shortparallel}{M^{B}_{D}(f)}} &
\end{array}
$$

Bsp. 33.21

Finde eine Matrix A, s.d. $\text{Lös}(A,0) = \text{Lin}\left(\underset{b_1}{\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}}, \underset{b_2}{\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}}\right) \leq \mathbb{R}^3$ $=: \mathcal{U}$

Beachte:

$$A\circ b_1 = 0 \quad \wedge \quad A \circ b_2 = 0$$

$$\Updownarrow \qquad\qquad \Updownarrow$$

$$(A\circ b_1)^t = 0^t \qquad (A\circ b_2)^t = 0^t$$

$$\overset{\shortparallel}{b_1^t \circ A^t} \qquad b_2^t \circ A^t$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\circ A^t = \begin{pmatrix}b_1^t\\ b_2^t\end{pmatrix}\circ A^t = \begin{pmatrix}0^t\\ 0^t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & \cdots\\ 0 & \cdots\end{pmatrix}$$

Ansatz: Schreibe die Erzeuger als Zeilen in Matrix B und löse $B\circ x = 0$ und transponiere die Lösung:

① $$\left(\overbrace{\begin{matrix}1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{matrix}}^{=B}\middle|\begin{matrix}0\\0\end{matrix}\right) \xrightarrow{I \mapsto I-2II} \left(\begin{matrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{matrix}\middle|\begin{matrix}0\\0\end{matrix}\right)$$

② $$\mapsto \left(\begin{matrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{matrix}\middle|\begin{matrix}0\\0\\0\end{matrix}\right) \longmapsto \left(\begin{matrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{matrix}\middle|\begin{matrix}0\\0\\0\end{matrix}\right)$$

$$\Rightarrow \text{Lös}(B,0) = \text{Lin}\left(\underset{A^t}{\underset{\shortparallel}{\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}}}\right) \Rightarrow A = \begin{pmatrix}1 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

d.h. $\mathcal{U}$ ist der Lösungsraum von $\boxed{x_1 - x_3 = 0}$

Bsp. 33.24

$\mathcal{U} = \text{Lin}\left(\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right) \leq \mathbb{R}^3$, $\mathcal{U}' = \left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3 \middle| x+y+z=0\right\} \leq \mathbb{R}^3$

Berechne den Durchschnitt $\mathcal{U}\cap\mathcal{U}'$!

① Berechne "Gleichungen" für beide Unterräume

($\mathcal{U}$): 33.22 $\Rightarrow$ $\mathcal{U} = \text{Lös}(A,0)$ mit $A = \begin{pmatrix}1 & 0 & -1\end{pmatrix}$

($\mathcal{U}'$): Def $\Rightarrow$ $\mathcal{U}' = \text{Lös}(A',0)$ mit $A' = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\end{pmatrix}$

② Werfe die Gleichungen zusammen und löse das LGS

$$\left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ A' & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xmapsto[II \mapsto II - I]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xmapsto[\text{Nullzeilen einfügen}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xmapsto[\text{Diagonalelemente } 0 \text{ zu } -1]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{U} \cap \mathcal{U}' = \text{Lös}\left(\begin{pmatrix} A \\ A' \end{pmatrix}, 0\right) = \text{Lin}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$$

§ 34 Die Determinante

A) Leibniz-Formel für Determinanten

Def. 34.1 Sei $A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}_n(K)$.

Dann heißt $\det(A) := \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot a_{1\sigma(1)} \cdot a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$

die Determinante von A.

Bsp. 34.2:

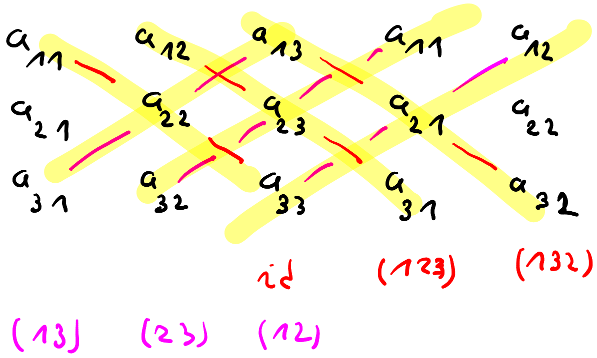
$n=1$: $A = (a_{11}) \Rightarrow \det(A) = a_{11}$

$n=2$: $S_2 = \{id, (12)\} \Rightarrow \det(A) = \operatorname{sgn}(id) \cdot a_{1id(1)} \cdot a_{2id(2)} + \operatorname{sgn}(12) \cdot a_{12} \cdot a_{21}$

$$= a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

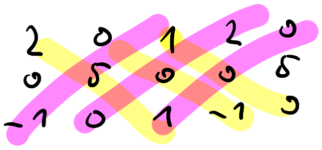
$n=3$:



Regel von Sarrus

$$\det(A) = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32}$$
$$- a_{31} \cdot a_{22} \cdot a_{13} - a_{32} \cdot a_{23} \cdot a_{11} - a_{33} \cdot a_{21} \cdot a_{12}$$

z.B.: $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$



$$\Rightarrow \det(A) = 2 \cdot 5 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \cdot (-1) + 1 \cdot 0 \cdot 0$$
$$- (-1) \cdot 5 \cdot 1 - 0 \cdot 0 \cdot 2 - 1 \cdot 0 \cdot 0 = 10 + 5 = 15$$

Prop. 34.3

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn} = \det \begin{pmatrix} a_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ * & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Beweis: $\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)}$

$= a_{11} \cdots a_{nn}$

$\sigma \neq \mathrm{id}$ (Δ°)

$\Rightarrow \exists\, i : i < \sigma(i) \Longrightarrow a_{i\sigma(i)} = 0$

$\exists\, j : j > \sigma(j) \overset{?}{\Longrightarrow} a_{j\sigma(j)} = 0$ (∇)

$\square$

z.B.: $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = 1 \cdot 4 \cdot 6 = 24$

Lemma 34.5

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot a_{\sigma(1)1} \cdot a_{\sigma(2)2} \cdots a_{\sigma(n)n}$$

Beweis:

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot a_{\sigma^{-1}(1)\sigma(\sigma^{-1}(1))} \cdots a_{\sigma^{-1}(n)\sigma(\sigma^{-1}(n))}$$

$\{1, \dots, n\} = \{\sigma^{-1}(1), \dots, \sigma^{-1}(n)\}$

$$= \sum_{\sigma^{-1} \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma^{-1}) \cdot a_{\sigma^{-1}(1)1} \cdot \ldots \cdot a_{\sigma^{-1}(n)n}$$

$$= \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn}(\pi) \cdot a_{\pi(1)1} \cdots a_{\pi(n)n}$$

$\square$

Prop. 34.6 $\det(A) = \det(A^t)$

Beweis:

$A = (a_{ij})$ und $A^t = (a'_{ij}) \Rightarrow a'_{ij} = a_{ji}$

$$\Rightarrow \det(A^t) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot \underset{\|}{a'_{1\sigma(1)}} \cdots \underset{\|}{a'_{n\sigma(n)}}$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot a_{\sigma(1)1} \cdots a_{\sigma(n)n} \underset{34.5}{=} \det(A)$$

$\square$

B) Determinante als Volumenform

Def. 34.8 Seien V und W zwei K-VR.

ⓐ $f: \overbrace{\underbrace{V \times \cdots \times V}_{n\text{-mal}}}^{V^n} \longrightarrow W$ heißt multilinear

$:\Longleftrightarrow$ f ist linear in jeder Komponente

d.h. · $f(x_1, \ldots, x_i + y_i, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n) + f(x_1, \ldots, y_i, \ldots, x_n)$

· $f(x_1, \ldots, \lambda \cdot x_i, \ldots, x_n) = \lambda \cdot f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n)$

ⓑ Eine multilineare Abb. $f: V^n \to W$ heißt alternierend, wenn $f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots, x_n) = 0$ falls $x_i = x_j$ für ein $i \neq j$.

Lemma 34.9 Sei $f: V^n \to W$ alternierend multilinear und $\sigma \in S_n$.

Dann: $f(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}) = \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot f(x_1, \ldots, x_n)$

Beweis:

Spezialfall: $\sigma = (i\ j)$

$$0 \underset{\substack{\uparrow \\ f \text{ alternierend}}}{=} f(x_1, \ldots, \underset{\substack{\uparrow \\ i}}{x_i + x_j}, \ldots, \underset{\substack{\uparrow \\ j}}{x_i + x_j}, \ldots, x_n)$$

$$= \underbrace{f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_i, \ldots, x_n)}_{=0} + \boxed{f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots, x_n) + f(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_i, \ldots, x_n)} + \overbrace{f(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_j, \ldots, x_n)}^{=0}$$

✓

$$\Rightarrow \underset{\substack{\| \\ f(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)})}}{f(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_i, \ldots, x_n)} = - f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots, x_n) = \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot f(x_1, \ldots, x_n)$$

Allgemein: $\sigma = \tau_1 \circ \dots \circ \tau_k$ mit τ_i Transposition

$$\Rightarrow f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}) = f(x_{\tau_1 \circ \dots \circ \tau_k(1)}, \dots, x_{\tau_1 \circ \dots \circ \tau_k(n)})$$

$$= (-1) \cdot f(x_{\tau_2 \circ \dots \circ \tau_k(1)}, \dots, x_{\tau_2 \circ \dots \circ \tau_k(n)})$$

$$\vdots$$

$$= (-1)^k \cdot f(x_1, \dots, x_n) = \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot f(x_1, \dots, x_n). \qquad \square$$

Bemerkung 34.10

Schreibe:

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Mat}_n(K) & \hat{=} & K^n \times \dots \times K^n & = & (K^n)^n \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} & & \\ A = (a_{ij}) & \hat{=} & \underbrace{(a^1, \dots, a^n)}_{\text{Spaltenvektoren von } A} & & \end{array}$$

Satz 34.11

ⓐ $\det : \mathrm{Mat}_n(K) \longrightarrow K : A \mapsto \det(A)$

ist eine alternierende multilineare Abbildung mit $\det(\mathbb{1}_n) = 1$.

ⓑ Wenn $f : \mathrm{Mat}_n(K) \to K$ alternierend multilinear ist,

dann $f(A) = f(\mathbb{1}_n) \cdot \det(A) \quad \forall A \in \mathrm{Mat}_n(K)$.

heißt Volumenform

Beweis:

ⓐ Seien $A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}_n(K)$ und $b^i = \begin{pmatrix} b_{1i} \\ \vdots \\ b_{ni} \end{pmatrix} \in K^n$

$ = (a^1 \dots a^n)$

Setze: $C := \left(a^1 \dots a^{i-1} \,\middle|\, \lambda \cdot a^i + \mu \cdot b^i \,\middle|\, a^{i+1} \dots a^n \right) \in \mathrm{Mat}_n(K)$

$B := \left(a^1 \dots a^{i-1} \,\middle|\, b^i \,\middle|\, a^{i+1} \dots a^n \right)$

$$\Rightarrow \det(C) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot a_{\sigma(1)1} \cdots a_{\sigma(i-1)i-1} \overset{(\lambda \cdot a_{\sigma(i)i} + \mu \cdot b_{\sigma(i)i})}{\overset{\|}{\left(\boxed{\lambda a_{\sigma(i)i} + \mu b_{\sigma(i)i}}\right)}} a_{\sigma(i+1)i+1} \cdots a_{\sigma(n)n}$$

$$= \lambda \cdot \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\, a_{\sigma(1)1} \cdots a_{\sigma(i)i} \cdots a_{\sigma(n)n} + \mu \cdot \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot a_{\sigma(1)1} \cdots b_{\sigma(i)i} \cdots a_{\sigma(n)n}$$

$$= \lambda \cdot \det(A) + \mu \cdot \det(B)$$

Also: det ist multilinear!

Zeige: det ist alternierend.

Sei $A = (a^1 \dots a^n) \in \mathrm{Mat}_n(K)$ mit $a^i = a^j$ für ein $i \neq j$.

$\Rightarrow$ $\tau = (i\ j)$ eine Transposition und $S_n = A_n \cup A_n \circ \tau$

$$\Rightarrow \det(A) = \sum_{\sigma \in A_n} a_{\sigma(1)1} \cdots a_{\sigma(n)n} - \sum_{\sigma \in A_n} \underbrace{a_{\sigma\circ\tau(1)1} \cdots a_{\sigma\circ\tau(n)n}}_{= a_{\sigma(1)1} \cdots \underset{= a_{\sigma(i)i}}{a_{\sigma(j)i}} \cdots \underset{= a_{\sigma(j)j}}{a_{\sigma(i)j}} \cdots a_{\sigma(n)n}}$$

$$\boxed{a^i = a^j}$$

$$= 0$$

Klar: $\det(\mathbb{1}_n) = 1 \cdots 1 = 1$

ⓑ Sei $A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}_n(K)$

$$\Rightarrow f(A) = f(a^1\ a^2 \dots a^n) = f\Big(\sum_{i=1}^n a_{i1} \cdot e_i \quad a^2 \dots a^n\Big)$$

$$= \sum_{j_1=1}^n a_{j_1 1} \cdot f(e_{j_1}\ a^2 \dots a^n) = \sum_{j_1=1}^n a_{j_1 1} \cdot \sum_{j_2=1}^n a_{j_2 2} \cdot f(e_{j_1}\ e_{j_2}\ a^3 \dots a^n)$$

$$\vdots$$

$$= \sum_{j_1, j_2, \dots, j_n = 1}^n a_{j_1 1} \cdot a_{j_2 2} \cdots a_{j_n n} \cdot \underbrace{f(e_{j_1}\ e_{j_2} \cdots e_{j_n})}_{= 0 \text{ falls } j_1, \dots, j_n \text{ nicht paarweise verschieden}}$$

$$= \sum_{\substack{j_1, j_2, \dots, j_n = 1 \\ \{j_1, \dots, j_n\} = \{1, \dots, n\}}}^n a_{j_1 1} \cdot a_{j_2 2} \cdots a_{j_n n} \cdot f(e_{j_1}\ e_{j_2} \cdots e_{j_n})$$

d.h. $\exists \sigma \in S_n : \sigma(1) = j_1, \dots, \sigma(n) = j_n$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \underline{a_{\sigma(1)1} \cdots a_{\sigma(n)n}} \cdot \underbrace{f(e_{\sigma(1)} \cdots e_{\sigma(n)})}_{= \mathrm{sgn}(\sigma) \cdot f(e_1 \cdots e_n)}$$

$$= \boxed{\mathrm{sgn}(\sigma)} \cdot f(\mathbb{1}_n)$$

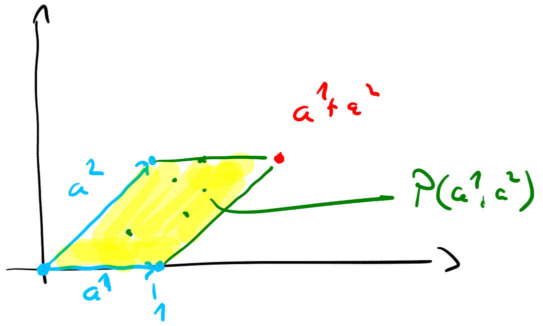
$$= f(\mathbb{1}_n) \cdot \det(A).$$

$\boxed{\Sigma}$

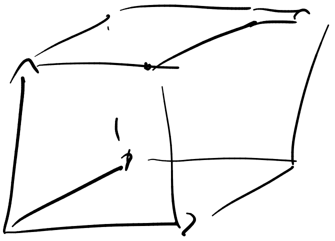
Bemerkung 34.12

$A = (a^1 \cdots a^n) \in \mathrm{Mat}_n(K) \Rightarrow P(a^1, \dots, a^n) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot a_i \;\middle|\; \begin{matrix} 0 \le \lambda_i \le 1 \\ \forall i = 1, \dots, n \end{matrix} \right\}$

Bsp.: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$



• dim = 3:



Beh: Volumen $\big(P(a^1 \cdots a^n)\big) = \det(A)$

C) Der Gauß-Algorithmus zur Berechnung der Determinante

Korollar 34.13 Sei $A \in \mathrm{Mat}_n(K)$ und $\lambda \in K$.

ⓐ Vertauschung zweier Spalten von A ändert nur das Vorzeichen der Determinante

ⓑ Multiplikation einer Spalte von A mit λ ändert $\det(A)$ um den Faktor λ.

ⓒ Addition des λ-fachen einer Spalte von A zu einer anderen Spalte von A ändert die Determinante nicht.

ⓓ Enthält A eine Nullspalte, dann ist $\det(A) = 0$.

ⓔ Sind zwei Spalten von A gleich, dann ist $\det(A) = 0$.

Beweis:

ⓐ Lemma 34.9

ⓑ Multilinearität

ⓒ $$\det\big(a^1 \cdots \boxed{a^i + \lambda a^j} \cdots a^n\big) = \det(a^1 \cdots a^i \cdots a^n) + \lambda \cdot \overbrace{\det(a^1 \cdots \underset{\substack{\uparrow \\ i}}{a^j} \cdots \underset{\substack{\uparrow \\ j}}{a^j} \cdots a^n)}^{=0}$$

$$= \det(A)$$

ⓓ folgt aus ⓑ mit $\lambda = 0$

ⓔ det ist alternierend □

Kor. 34.14 Alles in 34.13 gilt auch für Zeilen statt Spalten.

Beweis: $\det(A) = \det(A^t)$ □

Bsp. 34.16

$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{R})$. Berechne: $\det(A)$

Gauß:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{I \leftrightarrow II \\ d = -1}]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{II \mapsto II - 4 \cdot I \\ III \mapsto III - 7 \cdot I}]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -21 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[III \mapsto III - 2 \cdot II]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & -9 \end{pmatrix} =: A'$$

$$\Rightarrow \det(A) = d \cdot \det(A') = (-1) \cdot \left(1 \cdot (-3) \cdot (-9) \right) = -27$$

Bsp. 34.17

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & n \\ 1 & 0 & 1 & & n-1 \\ 2 & 1 & 0 & & n-2 \\ 3 & 2 & 1 & & n-3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & n-1 & n-2 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}((n+1)\times(n+1), \mathbb{R})$$

$$\xrightarrow[\substack{I \mapsto I - II \\ II \mapsto II - III \\ \vdots \\ n\text{-te} \mapsto n\text{-te} - (n+1)\text{-te}}]{} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ -1 & -1 & & & -1 & 1 \\ n & n-1 & \cdots & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{\text{letzte Spalte} = \text{letzte} + 1. \\ \text{vorletzte Spalte} = \text{vorletzte} + 1. \\ \vdots}]{} \begin{pmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & -2 & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & * & & -2 & 0 \\ -1 & & & & \\ n & & & * & n \end{pmatrix} = A'$$

$$\Rightarrow \det(A) = \det(A') = (-1) \cdot n \cdot (-2)^{n-1}$$

D) Der Determinantenmultiplikationssatz

Satz 34.19: $\det(A\circ B) = \det(A)\cdot\det(B)$

Beweis:

Halte A fest:

$$f: \mathrm{Mat}_n(K) \longrightarrow K : B \longmapsto \det(A\circ B)$$

① **f ist multilinear.**

Klar, weil A linear auf die Spalten von B wirkt

② **f ist alternierend**

$$b^i = b^j \Rightarrow A\circ B \text{ hat } \begin{array}{ll} \text{Spalte } i: & A\circ b^i \\ & \shortparallel \\ \text{Spalte } j: & A\circ b^j \end{array}$$

$$\Rightarrow \underset{0}{\underset{\shortparallel}{\det(A\circ B)}} = f(B)$$

Also: 34.11 $\Rightarrow$

$$\underset{\det(A\circ B)}{\underset{\shortparallel}{f(B)}} = \underset{\det(A)}{\underset{\shortparallel}{f(\mathbb{1}_n)}}\cdot\det(B)$$

Bsp. 34.20:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \underset{5\cdot 3 - 6\cdot 2}{\underset{\shortparallel}{\det(A)}} = \det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\cdot\det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = (1\cdot 3)\cdot(1\cdot 1) = 3$$

$$5\cdot 3 - 6\cdot 2 = 15 - 12 = 3$$

Kor. 34.21

$A \in \mathrm{Mat}_n(K)$ ist invertierbar $\Leftrightarrow$ $\det(A) \neq 0$

Insbesondere gilt dann: $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$

Beweis:

"⇒" Sei A invertierbar

$$\Rightarrow \det(A)\cdot\det(A^{-1}) = \det(A\circ A^{-1}) = \det(\mathbb{1}_n) = 1$$

$$\Rightarrow \det(A) \neq 0 \quad \text{und} \quad \det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

"⇐" Sei A nicht invertierbar $\Rightarrow \operatorname{rang}(A) < n$.

$\Rightarrow$ es gibt eine Spalte von A, die eine Linearkombination der anderen Spalten ist.

$\Rightarrow$ ich kann A durch elementare Spaltenoperationen vom Typ II in eine Matrix A' mit einer Nullspalte überführen

$$\Rightarrow \det(A) = \det(A') = 0$$

$\boxed{B}$

Bsp. 34.22

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A) = 1\cdot 1\cdot 3 - 3\cdot 2\cdot 2 = 3 - 12 = -9$$

$$\Rightarrow A \text{ ist invertierbar} \quad \text{und} \quad \det(A^{-1}) = -\frac{1}{9}$$

Bemerkung 34.23

$$\begin{array}{cccc} \det: & (Gl_n(K), \circ) & \longrightarrow & (K\setminus\{0\}, \cdot) \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\ni$} \\ & A & \longmapsto & \det(A) \end{array}$$

erfüllt: $\det(A\circ B) = \det(A)\cdot\det(B)$

d.h. det ist ein Gruppenhomomorphismus.

E) Kästchensatz

Satz 34.24:

$$\det\left(\begin{array}{c|c} \overbrace{B}^{k} & \overbrace{C}^{l} \\ \hline 0 & D \end{array}\right)\begin{array}{l}\}k\\ \}l\end{array} = \det(B)\cdot\det(D)$$

Beweis:

- $\left(\begin{array}{c|c} B & C \\ \hline 0 & D \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{1}_k & 0 \\ \hline 0 & D \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c|c} B & C \\ \hline 0 & \mathbb{1}_\ell \end{array}\right)$

$$\Rightarrow \det\left(\begin{array}{c|c} B & C \\ \hline 0 & D \end{array}\right) = \underset{\det(D)}{\overset{}{\underset{\shortparallel ?}{\det\left(\begin{array}{c|c} \mathbb{1}_k & 0 \\ \hline 0 & D \end{array}\right)}}} \cdot \underset{\det(B)}{\underset{\shortparallel ?}{\det\left(\begin{array}{c|c} B & C \\ \hline 0 & \mathbb{1}_\ell \end{array}\right)}}$$

- $f : \mathrm{Mat}_\ell(K) \longrightarrow K : D' \longmapsto \det\left(\begin{array}{c|c} \mathbb{1}_k & 0 \\ \hline 0 & D' \end{array}\right)$

ist multilinear und alternierend

$$\Rightarrow \det\left(\begin{array}{c|c} \mathbb{1}_k & 0 \\ \hline 0 & D \end{array}\right) = f(D) \underset{34.11}{=} \underset{\underset{1}{\shortparallel}}{f(\mathbb{1}_\ell)} \cdot \det(D) = \det(D)$$

- $g : \mathrm{Mat}_k(K) \longrightarrow K : B' \longmapsto \det\left(\begin{array}{c|c} B' & C \\ \hline 0 & \mathbb{1}_\ell \end{array}\right)$

ist multilinear und alternierend

$$\Rightarrow \det\left(\begin{array}{c|c} B & C \\ \hline 0 & \mathbb{1}_\ell \end{array}\right) = g(B) = \underbrace{g(\mathbb{1}_k)}_{=1} \cdot \det(B) = \det(B)$$

Bsp. 34.25 (Vandermonde Matrix)

Seien $a_0, \dots, a_n \in K$.

$$\det \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & a_0 & a_0^2 & \cdots a_0^{n-1} & a_0^n \\ 1 & a_1 & a_1^2 & a_1^{n-1} & a_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots a_n^{n-1} & a_n^n \end{pmatrix}}_{\in \mathrm{Mat}_{n+1}(K)} = \det \left(\begin{array}{c|cccc} 1 & 0 & \cdots & \overset{=0}{a_0^{n-1} - a_0^{n-1}} & \overset{=0}{a_0^n - a_0^n} \\ \hline 1 & a_1 - a_0 & & a_1^{n-1} - a_0 \cdot a_1^{n-2} & a_1^n - a_0 \cdot a_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & \underset{\underset{1 \cdot (a_n - a_0)}{\shortparallel}}{a_n - a_0} & \cdots & \underset{\underset{a_n^{n-2} \cdot (a_n - a_0)}{\shortparallel}}{a_n^{n-1} - a_0 \cdot a_n^{n-2}} & \underset{\underset{a_n^{n-1} \cdot (a_n - a_0)}{\shortparallel}}{a_n^n - a_0 \cdot a_n^{n-1}} \end{array}\right)$$

· letzte Spalte $- a_0 \cdot$ vorletzte

· n-te Spalte $- a_0 \cdot (n-1)$-te Spalte

⋮

2. Spalte $- a_0 \cdot$ 1. Spalte

$$\underset{\text{Kästchensatz}}{=} \underset{\underset{1}{\shortparallel}}{\det(1)} \cdot \det \begin{pmatrix} a_1 - a_0 & \cdots & a_1^{n-1} - a_0 \cdot a_1^{n-2} & a_1^n - a_0 \cdot a_1^{n-1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_n - a_0 & \cdots & a_n^{n-1} - a_0 \cdot a_n^{n-2} & a_n^n - a_0 \cdot a_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

$$= (a_n - a_0) \cdot \ldots \cdot (a_1 - a_0) \det \begin{pmatrix} 1 & a_1 & \cdots & a_1^{n-2} & a_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & a_n & \cdots & a_n^{n-2} & a_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

$$\overset{\text{Ind.}}{=} (a_n - a_0)\cdots(a_1 - a_0)\cdot \prod_{1\le i<j\le n}(a_j - a_i)$$

$$= \prod_{0\le i<j\le n}(a_j - a_i) \begin{cases} = 0, & \text{falls } \exists\, i\neq j : a_i = a_j \\ \neq 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

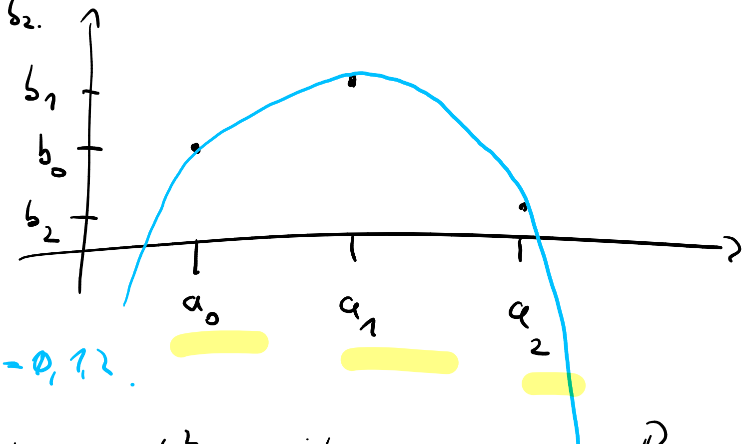
Woher kommt die Matrix? Interpolation

Gegeben a_0, a_1, a_2 und b_0, b_1, b_2.

Gesucht:

Eine Polynomfunktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vom Grad höchstens 2 mit:

$f(a_i) = b_i$ für $i = 0, 1, 2$.



Ansatz: $f = x_0 + x_1\cdot t + x_2\cdot t^2$ mit $x_0, x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ geeignet

$$\Rightarrow \quad 1\cdot x_0 + a_0\cdot x_1 + a_0^2\cdot x_2 = f(a_0) = b_0$$

$$1\cdot x_0 + a_1\cdot x_1 + a_1^2\cdot x_2 = f(a_1) = b_1$$

$$1\cdot x_0 + a_2\cdot x_1 + a_2^2\cdot x_2 = f(a_2) = b_2$$

$\Rightarrow$ Erweiterte Koeffizientenmatrix

$$\left(\underbrace{\boxed{\begin{matrix} 1 & a_0 & a_0^2 \\ 1 & a_1 & a_1^2 \\ 1 & a_2 & a_2^2 \end{matrix}}}_{\overset{\shortparallel}{A}} \;\middle|\; \begin{matrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{matrix}\right) \qquad \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \atop \shortparallel$$

Wenn A invertierbar ist, dann ist $A^{-1}\cdot b$ die eindeutige Lösung des LGS

Vandermonde $\Rightarrow$ A ist immer invertierbar!!!

F) Satz über die Adjunkte

Def. 34.26 Sei $A = (a_{ij}) = (a^1\, a^2 \dots a^n) \in \mathrm{Mat}_n(K)$, $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in K^n$.

- $A_i(b) := (a^1 \dots a^{i-1}\; b \;\; a^{i+1} \dots a^n)$

- $$A_i(e_j) = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & 0 & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & & 1 & & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \leftarrow j \\ \uparrow i \end{array}$$

- $$S_{ji}(A) := \begin{array}{c} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & 0 & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \leftarrow j \\ \uparrow i \end{array}$$

- $$A_{ji} := \left(\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & \cdots & a_{1,i-1} & a_{1,i+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ a_{j-1,1} & \cdots & a_{j-1,i-1} & a_{j-1,i+1} & \cdots & a_{j-1,n} \\ \hline a_{j+1,1} & \cdots & a_{j+1,i-1} & a_{j+1,i+1} & \cdots & a_{j+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,i-1} & a_{n,i+1} & \cdots & a_{n,n} \end{array}\right)$$

Lemma 34.27: $\det(A_i(e_j)) = \det(S_{ji}(A)) = (-1)^{i+j} \cdot \det(A_{ji})$

Def. 34.28 Sei $A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}_n(K)$.

Setze:
- $a^{\#}_{ij} := (-1)^{i+j} \cdot \det(A_{ji})$
- $A^{\#} := (a^{\#}_{ij})_{i,j=1,\dots,n} \in \mathrm{Mat}_n(K)$ heißt die Adjunkte von A.

Satz 34.29

$$A^{\#} \circ A = A \circ A^{\#} = \det(A) \cdot \mathbb{1}_n$$

Bew: Sei $A^{\#} \circ A = (c_{ik})_{i,k=1,\dots,n}$

$$\Rightarrow c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a^{\#}_{ij} \cdot a_{jk} = \sum_{j=1}^{n} a_{jk} \cdot \det(a^1 \dots \underset{\overset{\uparrow}{i}}{e_j} \dots a^n) = \det\Big(a^1 \dots \overset{\overset{a^k}{\parallel}}{\overbrace{\sum_{j=1}^{n} a_{jk} e_j}} \dots a^n\Big)$$

$$= \det(a^1 \dots \underset{\overset{\uparrow}{i}}{a^k} \dots a^n) = \begin{cases} \det(A), & i = k \\ 0 & i \neq k \end{cases} \quad \square$$

Kor. 34.30

A sei invertierbar $\Longrightarrow$ $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot A^\#$

Kor. 34.21:

Für $A \in \mathrm{Mat}_n(K)$ sind die folgenden Aussagen gleichwertig:

ⓐ A ist invertierbar ⓑ $\mathrm{rang}(A) = n$ ⓒ $\det(A) \neq 0$

ⓓ f_A ist bijektiv ⓔ f_A ist injektiv ⓕ f_A ist surjektiv

ⓖ $\mathrm{rZSF}(A) = \mathbb{1}_n$ ⓗ A ist Produkt endlich vieler Elementarmatrizen.

ⓘ $\exists B \in \mathrm{Mat}_n(K) : A \circ B = \mathbb{1}_n$. ⓙ Spalten und Zeilen von A sind Basis von K^n.

Bsp. 34.32

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Longrightarrow A^\# = \begin{pmatrix} \boxed{d} & \boxed{-b} \\ \boxed{-c} & \boxed{a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \frac{1}{\det(A)} \cdot A^\#$$

G) Laplacescher Entwicklungssatz

Satz 34.33

ⓐ $$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot \det(A_{ij})$$

(Entwicklung nach der i-ten Zeile)

ⓑ $$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot \det(A_{ij})$$

(Entwicklung nach der j-ten Spalte)

Beweis: $A \circ A^\# = (c_{ik}) \Rightarrow \det(A) = c_{ii} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot \overset{= (-1)^{i+j} \cdot \det(A_{ij})}{\boxed{a^\#_{ji}}}$ □

Bsp. 34.34

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cccccc} + & - & + & - & + & \cdots \\ - & + & - & + & - & \cdots \\ + & - & & & & \\ - & + & & & & \\ \vdots & \vdots & & & & \end{array}$$

$$\Rightarrow \quad \det(A) = 0\cdot\det\begin{pmatrix}3 & 4\\5 & 3\end{pmatrix} - 1\cdot\det\begin{pmatrix}2 & 0\\5 & 3\end{pmatrix} + 2\cdot\det\begin{pmatrix}2 & 0\\3 & 4\end{pmatrix}$$ Entwicklung nach der 1. Spalte

$$= 0\cdot\cancel{\boxed{}} - 2\cdot\boxed{\det\begin{pmatrix}1 & 4\\2 & 3\end{pmatrix}} + 0\cdot\cancel{\boxed{}}$$ Entwicklung nach der 1. Zeile

$$= -2\cdot(1\cdot3 - 2\cdot4) = +10.$$

Satz 34.36 ((Cramersche Regel)

Sei $A \in Mat_n(K)$ invertierbar und $b \in K^n$.

Dann gilt für die eindeutige Lösung $x \in K^n$ von $A\circ x = b$:

$$x_i = \frac{1}{\det(A)}\cdot\det(A_i(b)) = \frac{1}{\det(A)}\cdot\det\begin{pmatrix} a^1 \cdots & \underset{\substack{\uparrow\\ \text{i-te Spalte}}}{b} & \cdots a^n\end{pmatrix}$$

Beweis: Es gilt $x = A^{-1}\circ b = \frac{1}{\det(A)}\cdot A^{\#}\circ b$

$$\Rightarrow \quad x_i = \frac{1}{\det(A)}\cdot\sum_{j=1}^{n} a^{\#}_{ij}\cdot b_j = \frac{1}{\det(A)}\cdot\sum_{j=1}^{n}\det(A_i(e_j))\cdot b_j$$

$$= \frac{1}{\det(A)}\cdot\sum_{j=1}^{n}\det\begin{pmatrix}a^1 \cdots & \underset{\substack{\uparrow\\ \text{i-te}\\ \text{Spalte}}}{e_j} & \cdots a^n\end{pmatrix}\cdot b_j$$

$$= \frac{1}{\det(A)}\cdot\det\begin{pmatrix}a^1 \cdots a^{i-1} & \underbrace{\sum_{j=1}^{n} b_j\, e_j}_{=b} & a^{i+1} \cdots a^n\end{pmatrix}$$

$\square$

§ 35 Endomorphismen und ihre Eigenwerte

GV: V sei ein n-dim. K-VR mit $n < \infty$.

A) Invarianten unter Konjugation

Def. 35.2

$A, B \in Mat_n(K)$ heißen konjugiert, wenn:

$$\exists\, T \in GL_n(K) : B = T^{-1} \circ A \circ T$$

Bem. 35.3

ⓐ Konjugation ist eine Äquivalenzrelation auf $Mat_n(K)$.

ⓑ $f \in End_K(V) = Hom_K(V,V) \leftarrow \boxed{K\text{-Algebra}}$, B und D zwei Basen von V

$$\Rightarrow M^B_B(f) = T^D_B \circ M^D_D(f) \circ T^B_D$$

$$\underset{T = T^B_D}{=} T^{-1} \circ M^D_D(f) \circ T$$

$\Rightarrow M^B_B(f)$ und $M^D_D(f)$ sind konjugiert.

Def. 35.4 Sei $A = (a_{ij}) \in Mat_n(K)$

ⓐ $$\chi_A := \det(\underbrace{t \cdot 1\!\!1_n - A}_{\in Mat_n(K[t]) \subseteq Mat_n(K(t))}) \in K[t] \subseteq K(t)$$

heißt das charakteristische Polynom von A.

ⓑ $$Spur(A) := a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}$$ = Summe der Diagonaleinträge

heißt die Spur von A.

Bsp. 35.4: $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow t \cdot 1\!\!1_2 - A = \begin{pmatrix} t-5 & -2 \\ -6 & t-3 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \underset{\chi_A}{\underset{\|}{\det(t \cdot 1\!\!1_2 - A)}} = (t-5)\cdot(t-2) - (-6)\cdot(-2) = t^2 - \underset{Spur(A)\, =\, 5+3}{\underset{\|}{\textcircled{8}}}\,t + \underset{(5\cdot 3 - 6\cdot 2) = \det(A)}{\underset{\|}{\textcircled{3}}}$$

Prop. 35.6 Sei $A \in \mathrm{Mat}_n(K)$.

Dann $\chi_A = t^n + \alpha_{n-1} \cdot t^{n-1} + \alpha_{n-2} \cdot t^{n-2} + \dots + \alpha_1 \cdot t + \alpha_0 \in K[t]$

mit $\alpha_{n-1} = -\mathrm{Spur}(A)$ und $\alpha_0 = (-1)^n \cdot \det(A)$

Beweis Sei $t \cdot 1\!\!1_n - A = (p_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ mit $p_{ij} \in K[t]$

$\Rightarrow$ $p_{ii} = t - a_{ii}$, p_{ij} ist konstant für $i \neq j$.

mindestens 2x ist das Indexpaar nicht identisch, d.h. mindestens zwei $p_{i\sigma(i)}$ sind konstant

$$\Rightarrow \chi_A = \det(t \cdot 1\!\!1_n - A) = \det((p_{ij}))$$

$$= (t - a_{11}) \cdots (t - a_{nn}) + \sum_{id \neq \sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) \cdot \underbrace{p_{1\sigma(1)} \cdots p_{n\sigma(n)}}_{\deg \text{ ist } \leq n-2}$$

$$= t^n + (-a_{11} - a_{22} - \dots - a_{nn}) \cdot t^{n-1} + \boxed{\text{grad } \leq n-2} + \boxed{\text{grad } \leq n-2}$$

$$= t^n - \mathrm{Spur}(A) \cdot t^{n-1} + \text{Terme von Grad} \leq n-2.$$

Zudem:

$$\chi_A(0) = \det(0 \cdot 1\!\!1_n - A) = \det(-A) = (-1)^n \det(A)$$

$$\chi_A(0) = 0^n + \alpha_{n-1} \cdot 0^{n-1} + \dots + \alpha_1 \cdot 0 + \alpha_0 = \alpha_0$$

∎

Prop. 35.8

Seien $A, B \in \mathrm{Mat}_n(K)$ konjugiert.

Dann: $\chi_A = \chi_B$, $\mathrm{Spur}(A) = \mathrm{Spur}(B)$, $\det(A) = \det(B)$.

Beweis

$B = T^{-1} \circ A \circ T \Rightarrow T^{-1} \circ (t \cdot 1\!\!1 - A) \circ T = t \cdot T^{-1} \circ 1\!\!1_n \circ T - T^{-1} \circ A \circ T$
$= t \cdot 1\!\!1_n - B$

$$\Rightarrow \chi_B = \det(t \cdot 1\!\!1_n - B) = \det(T^{-1} \circ (t \cdot 1\!\!1_n - A) \circ T)$$

$$= \underset{\frac{1}{\det(T)}}{\det(T^{-1})} \cdot \underbrace{\det(t \cdot 1\!\!1_n - A)}_{= \chi_A} \circ \det(T) = \chi_A$$

∎

Def. 35.9 Sei $f \in End_K(V)$ und B ein Basis von V.

Dann: ⓐ $\chi_f := \chi_{M_B^B(f)}$ heißt charakteristisches Polynom von f

ⓑ $\det(f) := \det(M_B^B(f))$ heißt die Determinante von f

ⓒ $Spur(f) := Spur(M_B^B(f))$ heißt die Spur von f

Bemerk: Wegen 35.8 ist die Definition unabhängig von der gewählten Basis.

Bsp. 35.10

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 5x+2y \\ 6x+3y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

d.h. $M_E^E(f) = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$

Betrachte die Basis: $B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

$\Longrightarrow$ $M_B^B(f) = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ (nachrechnen!!!)

Dann: · $\chi_f = \chi_{M_E^E(f)} = \det \begin{pmatrix} t-5 & -2 \\ -6 & t-3 \end{pmatrix} = (t-5)\cdot(t-3) - (-2)\cdot(-6)$

$= t^2 - 8t + 3$

$\shortparallel$

· $\chi_f = \chi_{M_B^B(f)} = \det \begin{pmatrix} t-7 & -2 \\ -2 & t-1 \end{pmatrix} = (t-7)\cdot(t-1) - (-2)\cdot(-2)$

B) Eigenwerte, Eigenvektoren, Eigenräume

Def. 35.11 Sei: $f \in End_K(V)$, $A \in Mat_n(K)$

ⓐ $\lambda \in K$ heißt Eigenwert von f $:\Longleftrightarrow$ $\exists\, 0 \neq x \in V : f(x) = \lambda \cdot x$

Dann heißt x ein Eigenvektor von f zum Eigenwert λ.

Setze: $Eig(f, \lambda) := \{ x \in V \mid f(x) = \lambda \cdot x \}$ = Eigenraum von f zu λ.

ⓑ $\lambda \in K$ heißt Eigenwert von A $:\Longleftrightarrow$ $\exists\, 0 \neq x \in K^n : A \circ x = \lambda \cdot x$

Dann heißt x ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ.

Setze: $Eig(A, \lambda) := \{ x \in K^n \mid A \circ x = \lambda \cdot x \}$ = Eigenraum von A zu λ.

Bem. 35.12

$V = \mathbb{R}^4$, $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^4)$, $\overset{\neq 0}{x} \in \mathbb{R}^4$ mit $f(x) = \lambda \cdot x$

① $\lambda > 1$: f streckt den Vektor x um den Faktor λ

② $0 < \lambda < 1$: f staucht den Vektor x um den Faktor λ

③ $\lambda < 0$: dann spiegelt f zusätzlich am Ursprung

Bsp. 35.13

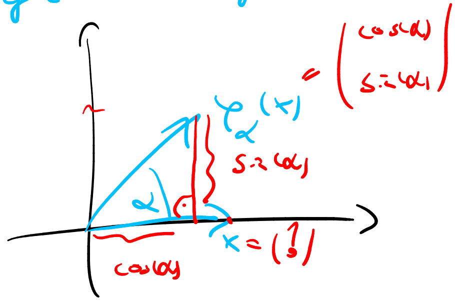
ⓐ dim $V = 1$: jeder Vektor $\neq 0$ ist ein Eigenvektor!

$\exists \lambda \in K : \forall x \in V : f(x) = \lambda \cdot x$

ⓑ dim $V \geq 2$: $f \in \mathrm{End}_K(V)$ muss keinen Eigenwert haben!!!

Bsp. $V = \mathbb{R}^2$, φ_α = Drehung um den Ursprung um den Winkel α gegen den Uhrzeigersinn

$$\Rightarrow M_E^E(f) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$



Zudem: φ_α hat genau dann einen Eigenwert und Eigenvektoren, wenn α ein ganzzahliges Vielfaches von π ist.

Bem. 35.14

ⓐ · $f(x) = \lambda \cdot x \iff (f - \lambda \cdot id)(x) = 0 \iff x \in \mathrm{Ker}(f - \lambda \cdot id)$

· Damit:

$$\mathrm{Eig}(f, \lambda) = \{x \in V \mid f(x) = \lambda \cdot x\} = \{x \in V \mid x \in \mathrm{Ker}(f - \lambda \cdot id)\} = \mathrm{Ker}(f - \lambda \cdot id)$$

Insbesondere: $\mathrm{Eig}(f, \lambda)$ ist ein K-Vektorraum, ein Unterraum von V.

· $$\mathrm{Eig}(A, \lambda) = \mathrm{Eig}(f_A, \lambda) = \mathrm{Ker}(f_A - \lambda \cdot id) = \mathrm{Ker}(f_{A - \lambda \cdot 1\!\!1_n})$$
$$= \mathrm{Lös}(A - \lambda \cdot 1\!\!1_n, 0) = \mathrm{Lös}(\lambda \cdot 1\!\!1_n - A, 0)$$

(b) $\mathrm{Eig}(f,\lambda)$ ist f-invariant.

c) Eigenwerte als Nullstellen des charakteristischen Polynoms

Satz 35.15

(a) λ ist ein Eigenwert von $f \in \mathrm{End}_K(V)$ $\iff$ $\chi_f(\lambda) = 0$

(b) λ ist ein Eigenwert von $A \in \mathrm{Mat}_n(K)$ $\iff$ $\chi_A(\lambda) = 0$

Insbesondere: f und A haben höchstens n Eigenwerte.

Beweis:

λ ist EW von f $\iff$ $\{0\} \neq \mathrm{Eig}(f,\lambda) = \mathrm{Ker}(\lambda \cdot \mathrm{id}_V - f)$

$\iff$ $\lambda \cdot \mathrm{id}_V - f$ ist nicht injektiv

$\underset{30.23}{\iff}$ $\lambda \cdot \mathrm{id}_V - f$ ist nicht bijektiv

$\iff$ $0 = \det(\lambda \cdot \mathrm{id}_V - f) = \chi_f(\lambda)$

$\square$

Bsp. 35.16

(a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{Q})$ $\in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{Q}[t]) \subseteq \mathrm{Mat}_3(\mathbb{Q}(t))$

Bestimme χ_A:

$$t \cdot \mathbb{1}_3 - A = \begin{pmatrix} t & -1 & -1 \\ 1 & t-2 & -1 \\ 1 & -1 & t-2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\mathrm{III} \mapsto \mathrm{III} - \frac{1}{t}\cdot \mathrm{I}]{\mathrm{II} \mapsto \mathrm{II} - \frac{1}{t}\cdot \mathrm{I}} \begin{pmatrix} t & -1 & -1 \\ 0 & t-2+\frac{1}{t} & -1+\frac{1}{t} \\ 0 & -1+\frac{1}{t} & t-2+\frac{1}{t} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} t & -1 & -1 \\ 0 & \frac{t^2-2t+1}{t} & \frac{-t+1}{t} \\ 0 & \frac{-t+1}{t} & \frac{t^2-2t+1}{t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t & -1 & -1 \\ 0 & \frac{(t-1)^2}{t} & -\frac{t-1}{t} \\ 0 & -\frac{t-1}{t} & \frac{(t-1)^2}{t} \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\mathrm{III} \mapsto \mathrm{III} + \frac{1}{t-1}\cdot \mathrm{II}]{} \begin{pmatrix} t & -1 & -1 \\ 0 & \frac{(t-1)^2}{t} & -\frac{t-1}{t} \\ 0 & 0 & \frac{(t-1)^2-1}{t} \end{pmatrix}$$

$$\frac{(t-1)^2-1}{t} = \frac{t^2-2t+1-1}{t} = \frac{t^2-2t}{t} = t-2$$

$$\Rightarrow \chi_A = \det(t \cdot \mathbb{1}_3 - A) = t \cdot \frac{(t-1)^2}{t} \cdot (t-2) = (t-1)^2 \cdot (t-2)$$

$\Rightarrow$ 1 und 2 sind die Nst. von χ_A und damit die EWe von A.

Bestimmen der Eigenraum $\mathrm{Eig}(A,1)$ zum EW 1

$\mathrm{Eig}(A,1) \,\|\, \mathrm{Lös}(1\cdot\mathbb{1}_3 - A, 0)$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ \underbrace{-1 \quad 1 \quad 1}_{= A - 1\cdot\mathbb{1}_3} & & & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{II \mapsto II - I \\ III \mapsto III - I}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[I \mapsto (-1)\cdot I]{} \boxed{\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)}$$

$$\longmapsto \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \mathrm{Eig}(A,1) = \mathrm{Lin}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$$

$\mathrm{Lös}(2\cdot\mathbb{1}_3 - A, 0)$

Bestimmen der Eigenraum $\mathrm{Eig}(A,2)$ zum EW 2

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ \underbrace{-1 \quad 1 \quad 0}_{A - 2\cdot\mathbb{1}_3} & & & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{II \mapsto II - \frac{1}{2}\cdot I \\ III \mapsto III - \frac{1}{2}\cdot I}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{III \mapsto III + II \\ I \mapsto (-\frac{1}{2})\cdot I \\ II \mapsto (-2)\cdot II}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[I \mapsto I + \frac{1}{2}\cdot II]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \longmapsto \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \mathrm{Eig}(A,2) = \mathrm{Lin}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$$

ⓑ $A_\alpha = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$ = Drehmatrix

$$\Rightarrow \chi_{A_\alpha} = \det\begin{pmatrix} t - \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & t - \cos(\alpha) \end{pmatrix} = (t - \cos(\alpha))^2 + \sin^2(\alpha) \overset{!}{=} 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (t - \cos(\alpha))^2 = -\sin^2(\alpha)$$

$$\underset{\text{in } \mathbb{C}}{\Leftrightarrow} \quad t - \cos(\alpha) = \pm i \cdot |\sin(\alpha)|$$

$\cap\,\mathbb{R}\;?$ $\Leftrightarrow$ $\sin(\alpha) = 0$

$\Updownarrow$

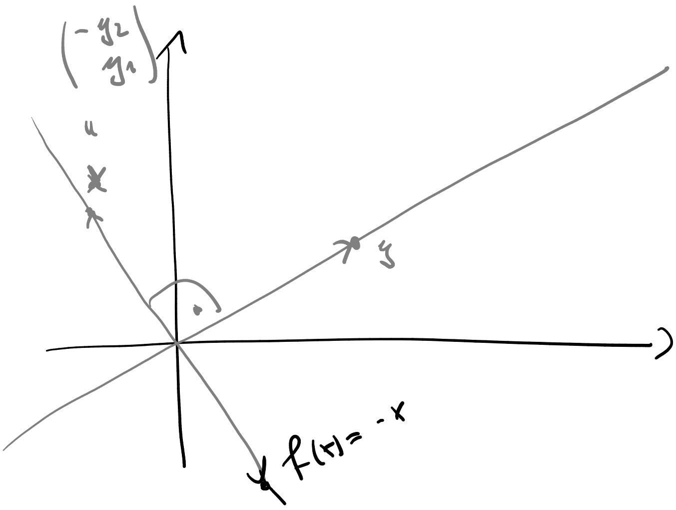
$\alpha \in \pi\cdot\mathbb{Z}$

Also A_α hat reelle Eigenwerte

$\Leftrightarrow \quad \alpha \in \pi\cdot\mathbb{Z}$,

ⓒ Sei $0 \neq y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ und f = Spiegelung an der Geraden durch y und 0

Bestimmen die EW von f:



$B = (y, x)$ ist Basis von $\mathbb{R}^2$, weil lin. unabh.

$$f(y) = y = 1 \cdot y + 0 \cdot x$$

$$f(x) = -x = 0 \cdot y + (-1) \cdot x$$

$$\Rightarrow M_B^B(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \chi_f = \det \begin{pmatrix} t-1 & 0 \\ 0 & t+1 \end{pmatrix} = (t-1) \cdot (t+1)$$

$\Rightarrow$ EW von f sind 1 und -1.

Kor. 35.17

$$\left. \begin{array}{l} A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \\ \text{oder} \\ A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ * & & \lambda_n \end{pmatrix} \end{array} \right\} \Rightarrow \chi_A = (t - \lambda_1) \cdots (t - \lambda_n)$$

und die EW von A sind $\lambda_1, \dots, \lambda_n$

Beweis:

$$\det \begin{pmatrix} t - \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & t - \lambda_n \end{pmatrix} = (t - \lambda_1) \cdots (t - \lambda_n)$$

D) Diagonalisierbarkeit

Def. 35.18

ⓐ f heißt diagonalisierbar $\Leftrightarrow$ $\exists\, B$ Basis von V : $M_B^B(f) = \begin{pmatrix} \ddots & 0 \\ 0 & \ddots \end{pmatrix}$

ⓑ A " " $\Leftrightarrow$ $\exists\, T \in Gl_n(K)$: $T^{-1} \circ A \circ T = \begin{pmatrix} \ddots & 0 \\ 0 & \ddots \end{pmatrix}$

Lemma 35.19

Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ seien paarweise verschiedene Eigenwerte von $f \in End_K(V)$ und $x_1, \dots, x_r$ seien zugehörige Eigenvektoren.

Dann: $(x_1, \dots, x_r)$ ist linear unabhängig.

Beweis: Induktion nach r:

$r=1$: $x_1 \neq 0$ als Eigenvektor $\Rightarrow$ (x_1) ist lin. unabh.

$r-1 \mapsto r$: Sei $\boxed{\mu_1 x_1 + \dots + \mu_r x_r = 0}$ (*). z.z.: $\mu_1, \dots, \mu_r = 0$

- $0 = f(0) = f(\mu_1 x_1 + \dots + \mu_r x_r) = \mu_1 \cdot f(x_1) + \dots + \mu_r \cdot f(x_r)$

  $= \mu_1 \cdot \lambda_1 \cdot x_1 + \dots + \mu_r \cdot \lambda_r \cdot x_r$

- $0 = \lambda_r \cdot 0 = \lambda_r \cdot (\mu_1 \cdot x_1 + \dots + \mu_r \cdot x_r)$

  $= \mu_1 \cdot \lambda_r \cdot x_1 + \dots + \mu_r \cdot \lambda_r \cdot x_r$

$-$

$\Rightarrow$ $0 = 0 - 0 = \mu_1 \cdot (\lambda_1 - \lambda_r) \cdot x_1 + \dots + \mu_{r-1} \cdot (\lambda_{r-1} - \lambda_r) \cdot x_{r-1}$

$\xRightarrow{\text{Ind.}}$ $(x_1, \dots, x_{r-1})$ ist lin. unabh.

$$\mu_1 \cdot \underbrace{(\lambda_1 - \lambda_r)}_{\neq 0} = \dots = \mu_{r-1} \cdot \underbrace{(\lambda_{r-1} - \lambda_r)}_{\neq 0} = 0$$

$\Rightarrow$ $0 = \mu_1 = \dots = \mu_{r-1}$

$\overset{(*)}{\Rightarrow}$ $0 = \mu_1 \cdot x_1 + \dots + \mu_r \cdot x_r = \mu_r \cdot \underset{\neq 0}{x_r}$ $\Rightarrow$ $\mu_r = 0$

$\Rightarrow$ $(x_1, \dots, x_r)$ ist lin. unabh. □

Satz 35.20

Für $f \in \mathrm{End}_K(V)$ sind $\Leftrightarrow$:

ⓐ f ist diagonalisierbar

ⓑ V hat eine Basis aus Eigenvektoren von f.

ⓒ Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in K$ die paarweise verschiedenen EWe von f.
Dann: $V = \mathrm{Eig}(f, \lambda_1) \oplus \dots \oplus \mathrm{Eig}(f, \lambda_r)$

ⓓ Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in K$ die paarweise verschiedenen EWe von f.
Dann: $\dim_K V = \dim_K \mathrm{Eig}(f, \lambda_1) + \dots + \dim_K \mathrm{Eig}(f, \lambda_r)$

Beweis

ⓐ $\Leftrightarrow$ ⓑ: f diagonalisierbar $\Leftrightarrow \exists \overset{(x_1,\dots,x_n)}{\overset{\shortparallel}{B}}$ Basis von V: $M_B^B(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$

d.h. $f(x_i) = \lambda_i \cdot x_i$

d.h. x_i ist EV von f zu λ_i

ⓓ $\Rightarrow$ ⓑ: Sei $\underset{\overset{\shortparallel}{(x_{i1}, \dots, x_{in_i})}}{B_i}$ eine Basis von $\mathrm{Eig}(f, \lambda_i)$

$\Rightarrow B := B_1 \cup \dots \cup B_r$. Zeige: B ist Basis von V

Wegen $\dim_K V = \sum_{i=1}^{r} \dim_K \mathrm{Eig}(f, \lambda_i)$ reicht es, zu zeigen, dass B linear unabh. ist!

Ansatz: $0 = \sum_{i=1}^{r} \underbrace{\sum_{j=1}^{n_i} \mu_{ij} \cdot x_{ij}}_{=: y_i \in \mathrm{Eig}(f, \lambda_i)} = 1 \cdot y_1 + \dots + 1 \cdot y_r$ (*)

Lemma 35.19 $\Rightarrow (y_i \mid i = 1, \dots, r,\ y_i \neq 0)$ ist linear unabh.

$\Rightarrow y_1 = \dots = y_r = 0$
(*)

$\Rightarrow 0 = y_i = \sum_{j=1}^{n_i} \mu_{ij} x_{ij}$ [redacted] $\Rightarrow \mu_{ij} = 0 \ \forall i,j$

lin. unabh.

Also B lin. unabh. $\Rightarrow B$ Basis aus EVen.

(b) ⇒ (c): ähnlich.

(c) ⇒ (d): Klar. (30.17 + Induktion) □

Kor. 35.21

Für $A \in \mathrm{Mat}_n(K)$ sind gleichwertig:

(a) A ist diagonalisierbar.

(b) K^n hat eine Basis aus Eigenvektoren von A.

(c) Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in K$ die paarweise verschiedenen EWe von A.
Dann: $K^n = \mathrm{Eig}(A, \lambda_1) \oplus \dots \oplus \mathrm{Eig}(A, \lambda_r)$

(d) Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in K$ die paarweise verschiedenen EWe von A.
Dann: $n = \dim_K \mathrm{Eig}(A, \lambda_1) + \dots + \dim_K \mathrm{Eig}(A, \lambda_r)$

Beweis: Wende 35.20 auf f_A an. □

Kor. 35.22

Sei $f \in \mathrm{End}_K(V)$ und $A \in \mathrm{Mat}_n(K)$.

(a) Wenn f genau n p.w. verschieden EWe hat, dann ist f diagonalisierba

(b) " A " n p.w. " " ", " " A " .

Beweis:

Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ die p.w. verschieden EWe von f

$$\left(\Rightarrow \quad \chi_f = (t - \lambda_1) \cdot (t - \lambda_2) \cdots (t - \lambda_n) \right)$$

Wähle zu λ_i einen Eigenvektor x_i

$\underset{35.19}{\Rightarrow}$ $(x_1, \dots, x_n)$ ist lin. unabh.

$\underset{\dim_K V = n}{\Rightarrow}$ $(x_1, \dots, x_n)$ Basis von V aus EVen von f

$\Rightarrow$ f ist diagonalisierbar. □

Bsp. 35.24

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_4(\mathbb{Q})$$

$$\Rightarrow \chi_A = \det(t \cdot \mathbb{1}_4 - A) = \det \begin{pmatrix} t-2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & t-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t-2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & t-1 \end{pmatrix}$$

$$= (t-2)\cdot(t-1)\cdot(t-2)\cdot(t-1) = (t-2)^2\cdot(t-1)^2$$

$\Rightarrow$ 1 und 2 sind die Eigenwerte von A.

Bestimme eine Basis von $\mathrm{Eig}(A,2)$

$$(2\cdot\mathbb{1}_n - A \mid 0) = \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\mathrm{I} \leftrightarrow \mathrm{IV}} \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\mathrm{I} \mapsto (-1)\cdot \mathrm{I}]{\mathrm{IV} \mapsto \mathrm{IV} - \mathrm{II}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\mathrm{I} \mapsto \mathrm{I} + \mathrm{II}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\text{Diagonale}]{-1 \text{ auf}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \mathrm{Eig}(A,2) = \mathrm{L\ddot{o}s}(2\cdot\mathbb{1}_4 - A, 0) = \mathrm{Lin}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$$

✓ ist Basis von $\mathrm{Eig}(A,2)$

$$\Rightarrow \dim_{\mathbb{R}} \mathrm{Eig}(A,2) = 2$$

Bestimme eine Basis für $\mathrm{Eig}(A,1)$

$$(1\cdot\mathbb{1}_4 - A \mid 0) \mapsto \text{------} \longmapsto \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \mathrm{Eig}(A,1) = \mathrm{L\ddot{o}s}(1\cdot\mathbb{1}_4 - A, 0) = \mathrm{Lin}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$$

$\Rightarrow \dim_{\mathbb{R}} \mathrm{Eig}(A,1) = 2$

✓ Basis von $\mathrm{Eig}(A,1)$

Also: $4 = \dim_{\mathbb{R}} \mathrm{Eig}(A,2) + \dim_{\mathbb{R}} \mathrm{Eig}(A,1)$

$\Rightarrow$ A ist diagonalisierbar!

Zudem: $$T = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in GL_4(\mathbb{R})$$

und $$T^{-1} \circ A \circ T = \begin{pmatrix} 2 & & & \\ & 2 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

$\square$

Kapitel V: Euklidische und unitäre Räume

GV: $\mathbb{K}$ sei der Körper $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$.

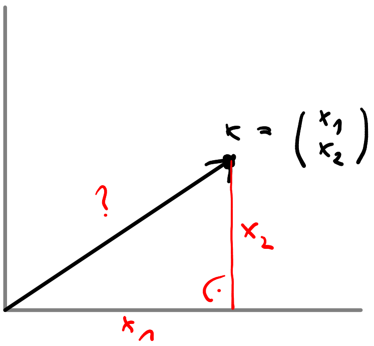
§36 Euklidische und unitäre Räume

36.0 Motivation (Euklidische Geometrie in der Ebene $\mathbb{R}^2$)

- Längen von Vektoren

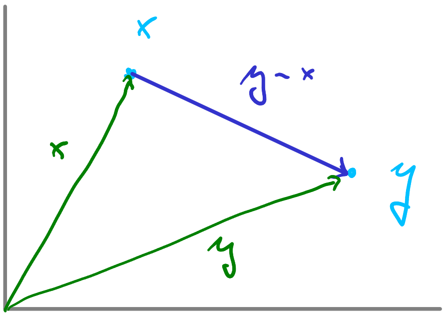
$$(?)^2 = x_1^2 + x_2^2$$

$$\Rightarrow \underset{\|x\|_2}{\underset{=:}{?}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$$



- Abstände von Punkten

$$\underset{\substack{\text{Abstand von} \\ x \text{ zu } y}}{\underset{\shortparallel}{d(x,y)}} = \|y-x\|_2 = \|x-y\|_2$$



- Winkel zwischen Vektoren

$$\varphi = \alpha - \beta$$

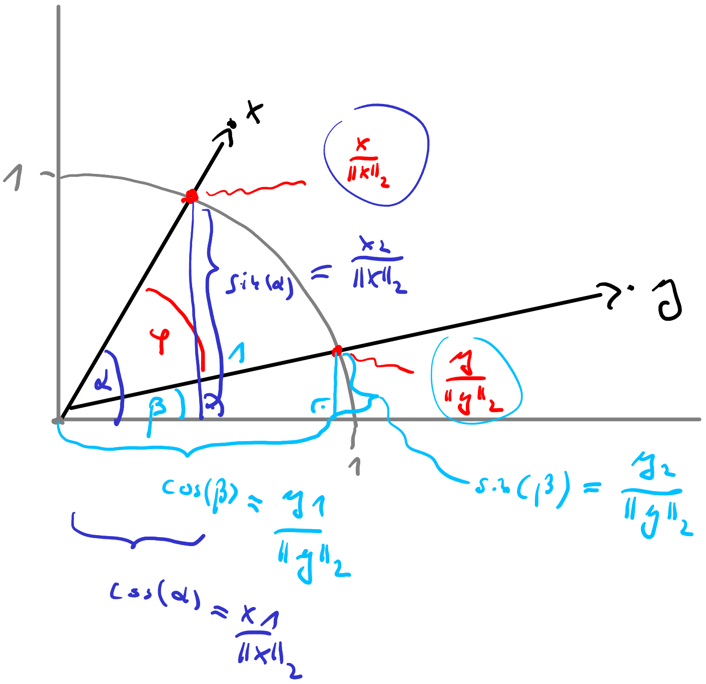
$$\Rightarrow \cos(\varphi) = \cos(\alpha - \beta)$$

$$= \cos(\alpha)\cdot\cos(-\beta) - \sin(\alpha)\cdot\sin(-\beta)$$

$$= \cos(\alpha)\cdot\cos(\beta) + \sin(\alpha)\cdot\sin(\beta)$$

$$= \frac{x_1}{\|x\|_2}\cdot\frac{y_1}{\|y\|_2} + \frac{x_2}{\|x\|_2}\cdot\frac{y_2}{\|y\|_2}$$

$$= \frac{\langle x,y\rangle}{\|x\|_2\cdot\|y\|_2}$$



Skalarprodukt: $\langle x,y\rangle = x_1\cdot y_1 + x_2\cdot y_2$

A) Skalarprodukte

Def. 36.1 Sei V ein $\mathbb{K}$-VR.

Eine Abbildung $\langle \cdot , \cdot \rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{K}$ heißt Skalarprodukt

$:\Longleftrightarrow$ ① $\langle x, \lambda \cdot y + \mu \cdot z \rangle = \lambda \cdot \langle x, y \rangle + \mu \cdot \langle x, z \rangle \quad \forall\, x,y,z \in V,\ \lambda, \mu \in \mathbb{K}$

(linear in 2. Komponente)

② $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle} \quad \forall x, y \in V$ (Antisymmetrie

③ $\underset{\substack{\cap \\ \mathbb{R}}}{\langle x, x \rangle} \geq 0$ und $(\langle x, x \rangle = 0 \Longleftrightarrow x = 0)$

(Definitheit)

Ein $\mathbb{R}$-VR mit Skalarprodukt heißt ein euklidischer Raum,
ein $\mathbb{C}$-VR " " " " unitärer Raum.

Bsp. 36.2

ⓐ Kanonisches Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$

$$\langle x, y \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i = x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + \dots + x_n \cdot y_n$$

Definitheit: $\langle x, x \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \geq 0$

$$\overset{!}{=} 0 \Longleftrightarrow \underset{\forall i = 1, \dots, n}{x_i^2 = 0} \Longleftrightarrow \underset{\forall i = 1, \dots, n}{x_i = 0} \Longleftrightarrow x = 0$$

ⓑ Kanonische Skalarprodukt auf $\mathbb{C}^n$

$$\langle x, y \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \overline{x_i} \cdot y_i$$

Antisymmetrie: $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} \overline{x_i} \cdot y_i = \overline{\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \overline{y_i}} = \overline{\langle y, x \rangle}$

Definitheit: $\langle x, x \rangle = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\overline{x_i} \cdot x_i}_{\substack{\shortparallel \\ 0 \leq |x_i|^2 \in \mathbb{R}}} \geq 0$

ⓒ $V = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ und $\langle f, g \rangle := \int_0^1 f(x) \cdot g(x)\, dx$

ist ein Skalarprodukt

Bem. 36.3

· Beachte: $\lambda \in \mathbb{R} \iff \lambda = \bar{\lambda}$

$$\langle \lambda x + \mu y, z\rangle = \bar{\lambda} \cdot \langle x, z\rangle + \bar{\mu} \cdot \langle y, z\rangle \underset{\lambda,\mu \in \mathbb{R}}{=} \lambda \cdot \langle x, z\rangle + \mu \cdot \langle y, z\rangle$$

· $A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$

$$\Rightarrow \bar{A}^t = A^t$$

B) Die euklidische Norm und das Skalarprodukt

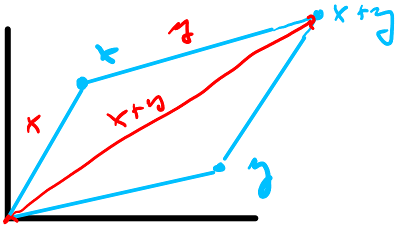
Def. 36.4 Sei V ein $\mathbb{K}$-VR.

Eine Abbildung $\|\cdot\| : V \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ heißt eine Norm auf V

:⟺ ① $\|x\| = 0 \iff x = 0$ (Definitheit)

② $\|\lambda \cdot x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ (Homogenität)

③ $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (Δ-Ungleichung)



Ein $\mathbb{K}$-VR mit Norm heißt ein normierter Raum.

Satz 36.6 (Cauchy-Schwarzsche Ungleichung)

Sei V ein VR mit Skalarprodukt $\langle \cdot , \cdot \rangle$.

Dann gilt: $|\langle x, y\rangle| \leq \sqrt{\langle x, x\rangle} \cdot \sqrt{\langle y, y\rangle}$

Zudem: "=" ⟺ (x, y) ist linear abhängig !

Beweis: o.E.: $x \neq 0 \neq y$

Sei $\lambda \in \mathbb{K}$. $\Rightarrow 0 \leq \langle x - \lambda \cdot y, x - \lambda \cdot y\rangle =$

$$= \langle x, x\rangle - \bar{\lambda} \cdot \langle y, x\rangle - \lambda \cdot \langle x, y\rangle + \underbrace{\bar{\lambda} \cdot \lambda}_{=|\lambda|^2} \cdot \langle y, y\rangle$$

$$= \langle x,x\rangle - \bar\lambda\cdot\overline{\langle x,y\rangle} - \lambda\cdot\langle x,y\rangle + \bar\lambda\cdot\lambda\langle y,y\rangle$$

Wähle $\lambda := \frac{\overline{\langle x,y\rangle}}{\langle y,y\rangle}$

$$\Rightarrow\quad 0 \le \langle x,x\rangle - \frac{\langle x,y\rangle}{\langle y,y\rangle}\cdot\overline{\langle x,y\rangle} - \frac{\overline{\langle x,y\rangle}}{\langle y,y\rangle}\cdot\langle x,y\rangle + \frac{\langle x,y\rangle}{\langle y,y\rangle}\cdot\frac{\overline{\langle x,y\rangle}}{\cancel{\langle y,y\rangle}}\cdot\cancel{\langle y,y\rangle}$$

$|\langle x,y\rangle|^2$ ‖

$$= \langle x,x\rangle - \frac{|\langle x,y\rangle|^2}{\langle y,y\rangle}$$

$$\Rightarrow\quad |\langle x,y\rangle|^2 \le \langle x,x\rangle\cdot\langle y,y\rangle$$. Dann Wurzel ziehen.

□

Satz 36.7

Sei V ein euklidischer oder unitärer Raum.

Dann ist $\|\cdot\| : V \longrightarrow \mathbb{R}_{\ge 0}$; $x \longmapsto \sqrt{\langle x,x\rangle}$ eine Norm

(die euklidische Norm zum Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$)

Es gilt dann: $|\langle x,y\rangle| \le \|x\|\cdot\|y\|$ (Cauchy-Schwarz)

Beweis:

② $\|\lambda\cdot x\| = \sqrt{\langle\lambda\cdot x,\lambda x\rangle} = \sqrt{\underbrace{\bar\lambda\cdot\lambda}_{|\lambda|^2}\cdot\langle x,x\rangle} = |\lambda|\cdot\sqrt{\langle x,x\rangle} = |\lambda|\cdot\|x\|$

① $\|x\| = 0 \iff \langle x,x\rangle = 0 \iff x = 0$

③ $\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle = \langle x,x\rangle + \langle x,y\rangle + \underbrace{\langle y,x\rangle}_{\overline{\langle x,y\rangle}} + \langle y,y\rangle$

$= \|x\|^2 + \langle x,y\rangle + \overline{\langle x,y\rangle} + \|y\|^2$

$= \|x\|^2 + 2\cdot\mathrm{Re}(\langle x,y\rangle) + \|y\|^2$

$\le \|x\|^2 + 2\cdot|\langle x,y\rangle| + \|y\|^2$

$\underset{CS}{\le} \|x\|^2 + 2\cdot\|x\|\cdot\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\|+\|y\|)^2$

Wurzel ziehen

⇓

Δ-Ungl. □

Bsp.: • $\|x\|_2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$ ist euklidische Norm auf $\mathbb{R}^n$

• $\|x\|_2 = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{|x_i|^2}_{\bar{x}_i \cdot x_i}$ " " " " $\mathbb{C}^n$

Bem. 36.8 (Winkel in euklidischen Räumen)

Seien $x, y \in V \setminus \{0\}$.

$$\overset{CS}{\Rightarrow} \quad |\langle x,y\rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

$$\Rightarrow \quad \frac{|\langle x,y\rangle|}{\|x\| \cdot \|y\|} \leq 1$$

$$\Rightarrow \quad -1 \leq \underbrace{\frac{\langle x,y\rangle}{\|x\| \cdot \|y\|}}_{\cos(\alpha)} \leq 1$$

für ein eindeutiges $\alpha \in [0, \pi]$

Definiere: $\measuredangle(x,y) = \alpha$

c) Orthonormalbasen und Parsevalsche Gleichung

Def. 36.9

Sei V ein euklidischer oder unitärer Raum.

ⓐ x heißt orthogonal zu y $:\Longleftrightarrow$ $\langle x,y\rangle = 0$

Schreibe: $x \perp y$

ⓑ $\underset{V}{\overset{M}{\cap\!\!|}}$ heißt orthogonal auf $\underset{V}{\overset{N}{\cap\!\!|}}$ $:\Longleftrightarrow$ $x \perp y$ $\forall \begin{smallmatrix} x \in M \\ y \in N \end{smallmatrix}$

Schreibe: $M \perp N$

ⓒ Für $U \leq V$ heißt $U^{\perp} := \{x \in V \mid x \perp y \ \forall y \in U\}$
heißt das orthogonale Komplement von U.

Lemma 36.10

Es gilt: $\mathcal{U}^{\perp} \leq V$.

Beweis:

Seien $x, y \in \mathcal{U}^{\perp}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ und $z \in \mathcal{U}$.

$$\Rightarrow \quad \langle \lambda \cdot x + \mu \cdot y, z \rangle = \bar{\lambda} \cdot \underbrace{\langle x, z \rangle}_{\overset{\shortparallel}{0}} + \bar{\mu} \cdot \underbrace{\langle y, z \rangle}_{\overset{\shortparallel}{0}} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \lambda \cdot x + \mu \cdot y \in \mathcal{U}^{\perp}$$

$\square$

Def. 36.11

Sei V ein euklidischer oder unitärer Raum, $B = (x_i \mid i \in I)$ Familie in V.

ⓐ B heißt orthogonal $:\Longleftrightarrow$ $\langle x_i, x_j \rangle = 0 \quad \forall\, i, j \in I$ mit $i \neq j$

ⓑ B heißt orthonormal $:\Longleftrightarrow$ $\langle x_i, x_j \rangle = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}$

$\Longleftrightarrow$ B ist orthogonal und $\|x_i\| = 1 \quad \forall\, i \in I$

ⓒ B ist eine Orthonormalbasis (ONB)

$:\Longleftrightarrow$ B ist eine Basis und orthonormal.

Bsp. 36.12

$E = (e_1, \dots, e_n)$ kanonische Basis des $\mathbb{K}^n$ ist bzgl. des Standardskalarprodukts eine ONB, da $\langle e_i, e_j \rangle = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}$

Lemma 36.13

Sei B ist eine orthogonale Familie in $V \setminus \{0\}$.

Dann ist B linear unabhängig.

Beweis:

Ansatz: $\sum\limits_{\substack{i \in I \\ \text{endlich}}} \lambda_i \cdot x_i = 0 \qquad (B = (x_i \mid i \in I))$

$$\Rightarrow \quad 0 = \langle x_j, 0 \rangle = \langle x_j, \sum_{\substack{i \in I \\ \text{endlich}}} \lambda_i \cdot x_i \rangle = \sum_{\substack{i \in I \\ \text{endlich}}} \lambda_i \cdot \underbrace{\langle x_j, x_i \rangle}_{\begin{cases} 0, & i \neq j \\ \neq 0, & i = j \end{cases}}$$

$$= \lambda_j \cdot \overbrace{\langle x_j, x_j \rangle}^{\neq 0} \quad \Rightarrow \quad \lambda_j = 0 \quad \forall\, j \in I$$

$\square$

Prop. 36.14 (Parsevalsche Gleichung)

Sei: $B = (x_i \mid i \in I)$ eine ONB von V und $x \in V$.

Dann: $$x = \sum_{\substack{i\in I \\ \text{endlich}}} \langle x_i, x \rangle \cdot x_i$$

Insb.: nur endlich viele der $\langle x_i, x \rangle$ sind $\neq 0$.

Beweis:

Ansatz: $$x = \sum_{\substack{i\in I \\ \text{endlich}}} \lambda_i \cdot x_i$$

Z.z.: $\lambda_j = \langle x_j, x \rangle \quad \forall j \in I$

$$\langle x_j, x \rangle = \langle x_j, \sum_{\substack{i\in I \\ \text{endlich}}} \lambda_i \cdot x_i \rangle = \sum_{\substack{i\in I \\ \text{endlich}}} \lambda_i \cdot \overbrace{\langle x_j, x_i \rangle}^{\Gamma \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}} = \lambda_j$$

$\boxtimes$

D) Orthonormalisierungsverfahren von Gram-Schmidt

Satz 36.16 (Gram-Schmidt)

Sei: $B = (x_1, \ldots, x_n)$ eine Basis des euklidischen bzw. unitären Raums V.

Dann: $\exists\ B' = (z_1, \ldots, z_n)$ ONB von V

s.d. $\forall k = 1, \ldots, n$: $\operatorname{Lin}(x_1, \ldots, x_k) = \operatorname{Lin}(z_1, \ldots, z_k)$

Beweis: Konstruiere die z_r rekursiv:

$r = 1$: $z_1 := \frac{x_1}{\|x_1\|}$ $\Rightarrow$ $\operatorname{Lin}(z_1) = \operatorname{Lin}(x_1)$ ✓

und $\|z_1\| = 1$

$1, \ldots, r \mapsto r+1$: Seien $(z_1, \ldots, z_r)$ eine orthonormale Familie mit $\operatorname{Lin}(z_1, \ldots, z_r) = \operatorname{Lin}(x_1, \ldots, x_r)$.

Setze: • $y_{r+1} := x_{r+1} - \sum_{i=1}^{r} \langle z_i, x_{r+1} \rangle \cdot z_i \neq 0$ $\qquad \operatorname{Lin}(x_1, \ldots, x_{r+1})$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \|$

• $z_{r+1} := \frac{y_{r+1}}{\|y_{r+1}\|}$ $\Rightarrow$ $\|z_{r+1}\| = 1$, $\operatorname{Lin}(z_1, \ldots, z_{r+1})$

Zeige noch: $\langle z_i, z_{r+1}\rangle = 0 \quad \forall i = 1,\dots,r$, d.h. $z_i \perp z_{r+1}$

$$\langle z_i, z_{r+1}\rangle = \frac{1}{\|y_{r+1}\|}\cdot\langle z_i, y_{r+1}\rangle = \frac{1}{\|y_{r+1}\|}\cdot\langle z_i, x_{r+1} - \sum_{j=1}^{r}\langle z_j, x_{r+1}\rangle\cdot z_j\rangle$$

$$= \frac{1}{\|y_{r+1}\|}\left(\langle z_i, x_{r+1}\rangle - \langle z_i, \sum_{j=1}^{r}\langle z_j, x_{r+1}\rangle z_j\rangle\right)$$

$$= \frac{1}{\|y_{r+1}\|}\cdot\left(\langle z_i, x_{r+1}\rangle - \sum_{j=1}^{r}\langle z_j, x_{r+1}\rangle\cdot\underbrace{\langle z_i, z_j\rangle}_{\begin{cases}0, & i\neq j\\ 1, & i=j\end{cases}}\right)$$

$$= \frac{1}{\|y_{r+1}\|}\cdot\left(\langle z_i, x_{r+1}\rangle - \langle z_i, x_{r+1}\rangle\cdot\cancel{\underbrace{\langle z_i, z_i\rangle}_{=1}}\right) = 0$$

$\square$

Bsp. 36.20

Sei $B = \left(\overset{x_1}{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}}, \overset{x_2}{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}}, \overset{x_3}{\begin{pmatrix}0\\0\\4\end{pmatrix}}\right)$ Basis des $\mathbb{R}^3$, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ Standardskalarprodukt.

Ziel: Überführe B in eine ONB $B' = (z_1, z_2, z_3)$ s.d. $\mathrm{Lin}(x_1,\dots,x_k) = \mathrm{Lin}(z_1,\dots,z_k) \quad \forall k = 1,2,3.$

①
$$z_1 = \frac{x_1}{\|x_1\|} = \frac{1}{\sqrt{1^2+0^2+1^2}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\0\\1/\sqrt{2}\end{pmatrix}$$

②
$$y_2 = x_2 - \langle z_1, x_2\rangle\cdot z_1$$
$$= \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} - \left(1\cdot\tfrac{1}{\sqrt{2}} + 1\cdot 0 + 1\cdot\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right)\cdot\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\0\\1/\sqrt{2}\end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} - \frac{2}{\sqrt{2}}\cdot\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\0\\1/\sqrt{2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$z_2 := \frac{y_2}{\|y_2\|} = \frac{y_2}{1} = y_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

③
$$y_3 = x_3 - \langle z_1, x_3\rangle\cdot z_1 - \langle z_2, x_3\rangle\cdot z_2$$
$$= \begin{pmatrix}0\\0\\4\end{pmatrix} - \frac{4}{\sqrt{2}}\cdot\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\0\\1/\sqrt{2}\end{pmatrix} - 0\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\0\\2\end{pmatrix}$$

$$z_3 := \frac{y_3}{\|y_3\|} = \frac{1}{\sqrt{(-2)^2+0^2+2^8}} \cdot \begin{pmatrix}-2\\0\\2\end{pmatrix} = \frac{1}{2\cdot\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix}-2\\0\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$$

Also: $\mathcal{B}' = (z_1, z_2, z_3) = \left(\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix} \right)$ ist ONB von $\mathbb{R}^3$.

E) Orthogonale und unitäre Matrizen

$z = x + i \cdot y$, $x, y \in \mathbb{R}$
$\bar{z} = x - i \cdot y$

Def 36.21:

ⓐ $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ heißt orthogonal $:\Longleftrightarrow$ $A^t \circ A = \mathbb{1}_n$ (d.h. $A^{-1} = A^t$)

Setze: $O(n) := \{ A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R}) \mid A^t \circ A = \mathbb{1}_n \}$ heißt die orthogonale Gruppe

ⓑ $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ " unitär $:\Longleftrightarrow$ $\underbrace{A^*}_{} \circ A = \mathbb{1}_n$ (d.h. $A^{-1} = A^*$)

$\hookrightarrow A^* := \bar{A}^t$

Setze: $U(n) := \{ A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C}) \mid A^* \circ A = \mathbb{1}_n \}$ heißt die unitäre Gruppe.

Prop. 36.22

A orthogonal oder unitär $\Longrightarrow$ $|\det(A)| = 1$

Beweis:

$$\det(\bar{A}^t) \cdot \det(A) = \det(A^*) \cdot \det(A) = \det(A^* \circ A) = \det(\mathbb{1}_n) = 1$$

$$\| $$

$$\overline{\det(A^t)} \cdot \det(A) = \overline{\det(A)} \cdot \det(A) = |\det(A)|^2$$

□

Prop. 36.23

Für eine Matrix $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$ sind $\ominus$:

ⓐ A ist orthogonal bzw. unitär

ⓑ A ist invertierbar mit $A^{-1} = A^*$

ⓒ Die Spalten von A sind eine ONB von $\mathbb{K}^n$ bzgl. Standardskalarp.

ⓓ Die Zeilen von A " " ONB " " " "

Beweis: ⓐ $\Leftrightarrow$ ⓑ : Definition

ⓑ $\Leftrightarrow$ ⓒ: $A = (a^1 \cdots a^n) \Rightarrow A^* = \bar{A}^t = \begin{pmatrix} (\bar{a}^1)^t \\ \vdots \\ (\bar{a}^n)^t \end{pmatrix}$

$\Rightarrow A^* \circ A = (b_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ mit $b_{ij} = (\bar{a}^i)^t \circ a^j = \langle a^i, a^j \rangle$

Also: $A^* \circ A = \mathbb{1}_n \Leftrightarrow \langle a^i, a^j \rangle = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}$

$\Leftrightarrow$ Spalten sind ONB.

ⓑ $\Leftrightarrow$ ⓓ: analog. $\square$

Bsp. 36.24: $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ ist orthogonal, weil die Spalten eine ONB sind!

Kor. 36.25: $(O(n), \circ)$ und $(U(n), \circ)$ sind Untergruppen von $(GL_n(\mathbb{C}), \circ)$

Beweis:

Seien $A, B \in O(n)$ bzw. $U(n)$

$\Rightarrow \cdot\ (A \circ B)^* \circ (A \circ B) = (\bar{A} \circ \bar{B})^t \circ (A \circ B) = (\bar{B}^t \circ \bar{A}^t) \circ (A \circ B)$

$= \bar{B}^t \circ (\underbrace{\bar{A}^t \circ A}_{= \mathbb{1}_n}) \circ B = \bar{B}^t \circ B = \mathbb{1}_n \Rightarrow A \circ B \in O(n)$ bzw. $U(n)$

$\cdot\ (A^{-1})^* = (A^*)^* = \overline{\bar{A}^t}^t = A = (A^{-1})^{-1}$

$\Rightarrow A^{-1} \in O(n)$ bzw. $U(n)$. $\square$

Bem. 36.26:

$\det : O(2) \longrightarrow \{1, -1\}$ ist ein Gruppenhomomorphismus

$$\Longrightarrow \quad O(2) = \boxed{\underset{\substack{\| \\ \{A \in O(2) \mid \det(A) = 1\} \\ \| \\ \ker(\det) \leq O(2)}}{SO(2)}} \,\dot{\cup}\, \boxed{\underset{\substack{\| \\ \{A \in O(2) \mid \det(A) = -1\}}}{\left(O(2) \setminus SO(2)\right)}}$$

Es gilt:

- $SO(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \middle| \; \alpha \in [0, 2\pi) \right\}$

  $\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} =: T(\alpha)$ = Drehung um den Winkel α um den Ursprung gegen Uhrzeigersinn

- $O(2) \setminus SO(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & -\cos(\alpha) \end{pmatrix} \middle| \; \alpha \in [0, 2\pi) \right\}$

  $\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & -\cos(\alpha) \end{pmatrix} =: S(\alpha)$ = Spiegelung an der Achse $\mathrm{Lin}\left(\begin{pmatrix} \cos(\frac{\alpha}{2}) \\ \sin(\frac{\alpha}{2}) \end{pmatrix}\right)$

F) Orthogonale Summen und orthogonale Projektionen

Def. 36.27

Sei V ein euklidischer oder unitärer Raum.

Dann: V heißt orthogonale Summe von $U_1, \dots, U_n \leq V$

$:\Longleftrightarrow$ $V = U_1 \oplus \dots \oplus U_n$ und $U_i \perp U_j \;\; \forall i \neq j$.

Schreibe dann: $V = U_1 \perp \dots \perp U_n$.

Prop. 36.28:

$U \leq V$ mit $\dim_{\mathbb{K}} V < \infty \Longrightarrow V = U \perp U^{\perp}$

Beweis: Zeige: $V = \mathcal{U} \oplus \mathcal{U}^\perp$ (dann fertig, weil $\mathcal{U} \perp \mathcal{U}^\perp$)

z.z: $\mathcal{U} \cap \mathcal{U}^\perp = \{0\}$

Sei $x \in \mathcal{U} \cap \mathcal{U}^\perp \Longrightarrow \langle \underset{\mathcal{U}}{\underset{\cap}{x}}, \underset{\mathcal{U}^\perp}{\underset{\cap}{x}} \rangle = 0 \Longrightarrow x = 0$

z.z: $V \subseteq \mathcal{U} + \mathcal{U}^\perp$

Sei $\tilde{\mathcal{B}} = (x_1, \dots, x_k)$ Basis von $\mathcal{U}$. Ergänze $\tilde{\mathcal{B}}$ zu Basis $\mathcal{B} = (x_1, \dots, x_n)$ von V und wende Gram-Schmidt auf $\mathcal{B}$ an und erhalte Basis $\mathcal{B}' = (z_1, \dots, z_n)$

$\Rightarrow \mathrm{Lin}(z_1, \dots, z_k) = \mathrm{Lin}(x_1, \dots, x_k) = \mathcal{U}$

und $z_j \perp z_i \quad \forall j = k+1, \dots, n, \quad i = 1, \dots, k$

$\Rightarrow z_{k+1}, \dots, z_n \in \mathrm{Lin}(z_1, \dots, z_k)^\perp = \mathcal{U}^\perp$

$$\Rightarrow V = \mathrm{Lin}(z_1, \dots, z_n) = \underset{\mathcal{U}}{\mathrm{Lin}(z_1, \dots, z_k)} + \underset{\mathcal{U}^\perp}{\underset{\cap}{\mathrm{Lin}(z_{k+1}, \dots, z_n)}}$$

(ξ)

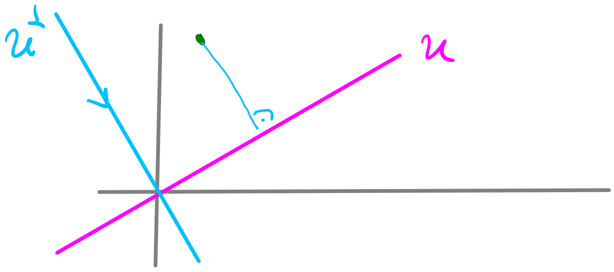
Bem 36.29

Sei V ein endl.-dim. euklidischer oder unitärer Raum und $\mathcal{U} \leq V$.

Dann: $\pi_{\mathcal{U}} : V \longrightarrow V \,;\, x = \underset{\mathcal{U}}{\underset{\cap}{u}} + \underset{\mathcal{U}^\perp}{\underset{\cap}{u'}} \longmapsto u$

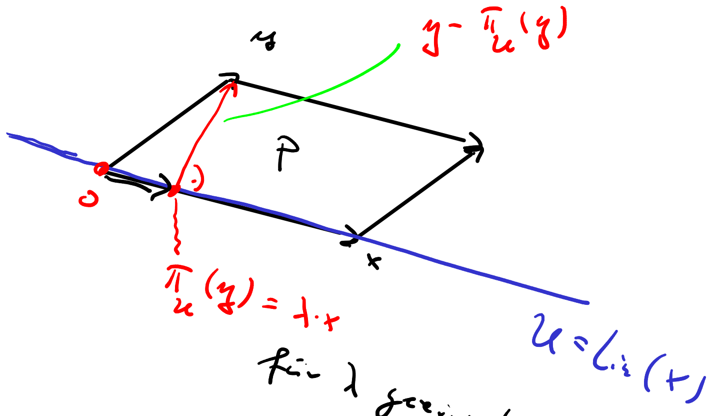
heißt die orthogonale Projektion auf $\mathcal{U}$

$\Rightarrow \mathrm{Im}(\pi_{\mathcal{U}}) = \mathcal{U} \quad , \quad \mathrm{Ker}(\pi_{\mathcal{U}}) = \mathcal{U}^\perp$



Bem. 36.30 (Determinante als Volumenform)

Zeige: $V(P) = |\det(x\ y)|$



$\cdot\ V(P) = \|x\| \cdot \|y - \pi_u(y)\|$

$\cdot\ |\det(x\ \ y)| = |\det(x\ \ y - \lambda x)|$ für λ geeignet

$$= |\det(x\ \ y - \pi_u(y))| = \|x\| \cdot \|y - \pi_u(y)\| \cdot \underbrace{\left|\det\begin{pmatrix} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{normiert}}}{\frac{x}{\|x\|}} & \underset{\substack{\uparrow \\ \text{normiert}}}{\frac{y - \pi_u(y)}{\|y - \pi_u(y)\|}} \end{pmatrix}\right|}_{=1}$$

senkrecht

ist ONB von $\mathbb{R}^2$

also Matrix orthogonal

$\square$

§ 37 Spektralsatz und Hauptachsentransformation

GV: V sei ein endl.-dim. euklidischer oder unitärer Raum

A) Die adjungierte Abbildung

Satz 37.1

Sei $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$. Dann: $\exists_1\ f^* \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$ s.d.

$$\forall x, y \in V: \quad \langle f(x), y \rangle = \langle x, f^*(y) \rangle$$

f^* heißt die zu f adjungierte Abbildung und für eine ONB $B = (x_1, \dots, x_n)$ von V gilt:

$$f^*(y) = \sum_{i=1}^{n} \langle f(x_i), y \rangle \cdot x_i .$$

Beweis:

Existenz von f^*: Definiere $f^*: V \to V$ durch $f^*(y) = \sum_{i=1}^{n} \langle f(x_i), y \rangle \cdot x_i$

für eine feste ONB $B = (x_1, \dots, x_n)$.

$\Rightarrow f^*$ ist linear, weil $\langle \cdot, \cdot \rangle$ linear in der 2. Komponente.

Zu zeigen: $\langle f(x), y\rangle = \langle f(\sum_{i=1}^{n}\langle x_i, x\rangle \cdot x_i), y\rangle$

$$= \left\langle \sum_{i=1}^{n} \underline{\langle x_i, x\rangle} \cdot f(x_i), y \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \overline{\langle x_i, x\rangle} \cdot \langle f(x_i), y\rangle$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \langle x, x_i\rangle \cdot \overline{\langle f(x_i), y\rangle} = \left\langle x, \sum_{i=1}^{n} \langle f(x_i), y\rangle \cdot x_i \right\rangle$$

$$= \langle x, f^*(y)\rangle$$

Eindeutigkeit von f^*

Sei $h \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$ mit $\langle f(x), y\rangle = \langle x, h(y)\rangle \ \forall x, y$

$$\Rightarrow h(y) = \sum_{i=1}^{n} \langle x_i, h(y)\rangle \cdot x_i = \sum_{i=1}^{n} \langle f(x_i), y\rangle \cdot x_i = f^*(y)$$

$$\Rightarrow h = f^*.$$

$\square$

Korollar 37.2 $\quad f^{**} = f$

Beweis:

$$\langle f^*(x), y\rangle = \overline{\langle y, f^*(x)\rangle} = \overline{\langle f(y), x\rangle} = \langle x, f(y)\rangle$$

$\square$

Def. 37.3

Für $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$ heißt $A^* = \overline{A}^t$ die Adjungierte von A.

(Für $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ gilt $A^* = A^t$.)

Korollar 37.4

B eine ONB von V und $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$

$$\Rightarrow \quad M_B^B(f^*) = \left(M_B^B(f)\right)^*$$

Beweis: $M_B^B(f) = (a_{ij})_{i,j}$ und $M_B^B(f^*) = (b_{ji})_{j,i}$

$B=(x_1,\dots,x_n)$

$$\implies \sum_{i=1}^n a_{ij}\cdot x_i = f(x_j) = \sum_{i=1}^n \langle x_i, f(x_j)\rangle \cdot x_i \qquad ①$$

$$\sum_{j=1}^n b_{ji}\cdot x_j = f^*(x_i) = \sum_{j=1}^n \langle x_j, f^*(x_i)\rangle \cdot x_j \qquad ②$$

$$\implies \overline{a_{ij}} \overset{①}{=} \overline{\langle x_i, f(x_j)\rangle} = \langle f(x_j), x_i\rangle = \langle x_j, f^*(x_i)\rangle \overset{②}{=} b_{ji} \qquad \square$$

Bsp. 37.5 $V = \mathbb{C}^2$, Standardskalarprodukt, E = kanonische Basis

$$f: \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2;\ \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix}2x+4y\\2y-4x\end{pmatrix}$$

Ziel: bestimme f^*

$$f(e_1) = \begin{pmatrix}2\\-4\end{pmatrix},\ f(e_2) = \begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix} \implies M_E^E(f) = \begin{pmatrix}2&4\\-4&2\end{pmatrix}$$

$$\implies M_E^E(f^*) = \left(M_E^E(f)\right)^* = \begin{pmatrix}2&-4\\4&2\end{pmatrix}$$

$$\implies f^*: \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2;\ \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix}2&-4\\4&2\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2x-4y\\4x+2y\end{pmatrix}$$

B) Spektralsatz für selbstadjungierte Endomorphismen

Def. 37.6

a) $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$ heißt selbstadjungiert oder hermitesch

$\iff$ $f^* = f$, d.h. $\langle f(x), y\rangle = \langle x, f(y)\rangle \ \forall x,y \in V$

b) $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ heißt hermitesch $\iff$ $A^* = A$.

Prop. 37.7:

Sei B eine ONB von V und $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$.

Dann: f ist selbstadjungiert $\iff$ $M_B^B(f)$ ist hermitesch

Beweis:

$$f \text{ selbstadjungiert} \iff f^* = f \iff M_B^B(f^*) \overset{B \text{ ONB}}{=} M_B^B(f)$$

$$M_B^B(f^*) \overset{B \text{ ONB}}{=} \left(M_B^B(f)\right)^*$$

$$\iff M_B^B(f) \text{ ist hermitesch}$$

□

Lemma 17.8

Sei $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$ selbstadjungiert.

Dann: $\chi_f \in \mathbb{R}[t]$ und χ_f zerfällt über $\mathbb{R}$ in Linearfaktoren

Insbesondere: alle Eigenwerte von f sind reelle Zahlen.

Beweis:

Wähle eine ONB B von V und setze $A := M_B^B(f) \in \overset{\overset{\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})}{\cup\!\shortmid}}{\mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})}$

Beachte: $\chi_f = \chi_A$

Beachte: $\exists\, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C} : \chi_A = (t-\lambda_1) \cdots (t-\lambda_n)$

$\implies \lambda_i$ ist ein Eigenwert von A über $\mathbb{C}$

$\implies \exists\, 0 \neq x \in \mathbb{C}^n : A \circ x = \lambda_i \cdot x$ $\qquad \bar{A}^t = A^* = A$

z.z.: $\lambda_i \in \mathbb{R}$

$$\lambda_i \cdot \underbrace{(\bar{x}^t \circ x)}_{\overset{\shortparallel}{\langle x, x \rangle \neq 0}} = \bar{x}^t \circ (\lambda x) = \bar{x}^t \circ A \circ x \overset{\bar{A}^t = A^* = A}{=} \underbrace{\bar{x}^t \circ \bar{A}^t}_{} \circ x$$

$$= (\overline{A \circ x})^t \circ x = (\overline{\lambda_i \cdot x})^t \circ x = \bar{\lambda}_i \cdot (\bar{x}^t \circ x)$$

$\implies \lambda_i = \bar{\lambda}_i \implies \lambda_i \in \mathbb{R}$

□

Spektralsatz für selbstadjungierte Endomorphismen 37.9

Sei $f \in \operatorname{End}_{\mathbb{K}}(V)$.

Dann sind ä :

ⓐ f ist selbstadjungiert

ⓑ V hat eine ONB aus Eigenvektoren von f und alle Eigenwerte sind reelle Zahlen.

ⓒ $\exists$ ONB B von V : $M_B^B(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \in \operatorname{Mat}_n(\underline{\underline{\mathbb{R}}})$

d.h. f ist diagonalisierbar bez. ONB mit reellen Eigenwerten

Beweis: ⓑ $\Leftrightarrow$ ⓒ : klar.

ⓐ $\Rightarrow$ ⓑ : Beweis durch Induktion nach $n = \dim_{\mathbb{K}}(V)$:

$n=1$: klar, weil $0 \neq x \in V \Rightarrow \left(\frac{x}{\|x\|}\right)$ ist ONB und $\frac{x}{\|x\|}$ ist EV

$n-1 \mapsto n$: χ_f zerfällt über $\mathbb{R}$ in Linearfaktoren (wegen 37.8)

$\Rightarrow \exists\, \lambda \in \mathbb{R} : \chi_f(\lambda) = 0$

$\Rightarrow \lambda$ ist ein EW von f

$\Rightarrow \exists\, 0 \neq x \in V : f(x) = \lambda \cdot x$

Setze : $\mathcal{U} := \operatorname{Lin}(x) \Rightarrow \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{U} = 1$

$\Rightarrow \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{U}^\perp = n - \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{U} = n-1$

Zeige: $f(\mathcal{U}^\perp) \subseteq \mathcal{U}^\perp$. Sei $y \in \mathcal{U}^\perp$

$$\langle f(y), x \rangle = \langle y, f^*(x) \rangle = \langle y, f(x) \rangle$$

$$= \langle y, \lambda \cdot x \rangle = \lambda \cdot \underbrace{\langle y, x \rangle}_{=0} = \lambda \cdot 0 = 0$$

$$\Rightarrow f(y) \in \mathcal{U}^\perp \Rightarrow f(\mathcal{U}^\perp) \subseteq \mathcal{U}^\perp$$

Also $f_{\mathcal{U}^\perp} : \mathcal{U}^\perp \to \mathcal{U}^\perp$ ist ein Endomorphismus

$\underset{\forall\, v,w \in \mathcal{U}^\perp}{\Rightarrow} \langle f_{\mathcal{U}^\perp}(v), w \rangle = \langle f(v), w \rangle = \langle v, f^*(w) \rangle = \langle v, f(w) \rangle = \langle v, f_{\mathcal{U}^\perp}(w) \rangle$

$\Rightarrow f_{\mathcal{U}^\perp}$ ist selbstadjungiert.

Induktion $\Rightarrow$ $\exists$ ONB $B' = (x_2, \dots, x_n)$ von $U^\perp$ aus EVen von $f_{U^\perp}$ und die EWe $\lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$

$$\underline{\text{d.h.}} \quad \underset{\substack{\| \\ f(x_i)}}{f_{U^\perp}(x_i)} = \lambda_i x_i \quad \text{für } i = 2, \dots, n$$

Setze $x_1 := \frac{x}{\|x\|}$ $\Rightarrow$ $\|x_1\| = 1$ und $x_1 \perp x_i \; \forall i \geq 2$

$\Rightarrow$ $B = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ist ONB von V aus EVen von f und die Eigenwerte sind reell.

$\underline{\text{ⓑ} \Rightarrow \text{ⓐ}}$: Sei $B = (x_1, \dots, x_n)$ eine ONB aus EVen von f mit EWen $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$.

$$\Rightarrow \left(M_B^B(f)\right)^* = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} \overline{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \overline{\lambda_n} \end{pmatrix} = \underset{\substack{\| \\ M_B^B(f)}}{\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}}$$

$\underset{37.7}{\Rightarrow}$ f ist selbstadjungiert.

$\square$

Korollar 37.10

Sei $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$ symmetrisch (falls $\mathbb{K} = \mathbb{R}$) oder hermitesch (falls $\mathbb{K} = \mathbb{C}$).

Dann $\exists$ $T \in O(n)$ bzw. $T \in U(n)$ mit

$$T^* \circ A \circ T = T^{-1} \circ A \circ T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

d.h. $A = T \circ \left(\diagdown \right) \circ T^*$ heißt die Eigenwertzerlegung von A

mit $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$

Insbesondere: symmetrische bzw. hermitesche Matrizen sind diagonalisierbar und haben nur reelle Eigenwerte.

Beweis: Wende 37.9 auf f_A an und setze $T = T_E^B$.

$\square$

Bsp. 37.11

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{R}) \quad \text{symmetrisch.}$$

Ziel: Bestimme $T \in O(3)$: $T^* \circ A \circ T = \begin{pmatrix} \diagdown & 0 \\ 0 & \diagdown \end{pmatrix}$

① Bestimme χ_A:

$$\chi_A = \det \begin{pmatrix} t & 1 & -1 \\ 1 & t & 1 \\ -1 & 1 & t \end{pmatrix} = t^3 - 2 - 3t = (t-2)\cdot(t+1)^2$$

Also: -1 und 2 sind die EWe von A

② Bestimme die Eigenräume

$$\mathrm{Eig}(A,2) = \mathrm{Lös}(2\cdot\mathbb{1}_3 - A, 0) \underset{\text{Gauß}}{=} \mathrm{Lin}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$$

$$\mathrm{Eig}(A,-1) = \mathrm{Lös}(-\mathbb{1}_3 - A, 0) \overset{\downarrow}{=} \mathrm{Lin}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$$

③ Bestimme ONB's der Eigenräume mittels Gram-Schmidt

(3.1) $\mathrm{Eig}(A,2)$: $\quad x_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$z_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

(3.2) $\mathrm{Eig}(A,-1)$: $\quad x_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$z_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$y_3 = x_3 - \langle z_2, x_3 \rangle \cdot z_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$z_3 = \frac{1}{\|y_3\|} \cdot y_3 = \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{2}}} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

Damit:

$$T = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \quad T^t \circ A \circ T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Satz 37.12 (Spektralzerlegung selbstadjungierter Endomorphismen)

Sei $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(U)$ selbstadjungiert und $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{R}$ die paarweise verschiedenen Eigenwerte von f.

Ferner bezeichne $\pi_i : V \to V$ die orthogonale Projektion auf $\mathrm{Eig}(f, \lambda_i)$

Dann: ① $f = \lambda_1 \cdot \pi_1 + \dots + \lambda_r \cdot \pi_r$ (Spektralzerlegung von f)

und ② $V = \mathrm{Eig}(f, \lambda_1) \perp \dots \perp \mathrm{Eig}(f, \lambda_r)$

Beweis:

② Spektralsatz $\Rightarrow$ $\exists$ ONB von V aus Eigenvektoren von f

$\Rightarrow V = \mathrm{Eig}(f, \lambda_1) \oplus \dots \oplus \mathrm{Eig}(f, \lambda_r)$

und $\mathrm{Eig}(f, \lambda_i) \perp \mathrm{Eig}(f, \lambda_j)$ für $i \neq j$.

① Sei $x \in V$ $\Rightarrow \exists_1\, x_i \in \mathrm{Eig}(f, \lambda_i) : x = x_1 + \dots + x_r$

$$\Rightarrow \pi_j(x_i) = \begin{cases} x_i, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad \text{weil } x_i \in \mathrm{Eig}(f, \lambda_j)^{\perp}$$

$$\Rightarrow \pi_j(x) = \pi_j(x_1) + \dots + \pi_j(x_r) = x_j$$

$$\Rightarrow \left(\lambda_1 \cdot \pi_1 + \dots + \lambda_r \cdot \pi_r\right)(x) = \lambda_1 \cdot \pi_1(x) + \dots + \lambda_r \cdot \pi_r(x)$$

$$= \lambda_1 \cdot x_1 + \lambda_2 \cdot x_2 + \dots + \lambda_r \cdot x_r$$

$$= f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_r) = f(x_1 + \dots + x_r) = f(x)$$

$\square$

c) Hauptachsentransformation für quadratische Formen

Def. 37.13

Sei V ein $\mathbb{R}$-VR.

① $b : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt bilinear

$:\Longleftrightarrow$ b linear in beiden Komponenten ist

d.h. $b(\lambda x + \mu y, z) = \lambda \cdot b(x,z) + \mu \cdot b(y,z)$

$b(x, \lambda y + \mu z) = \lambda \cdot b(x,y) + \mu \cdot b(x,z)$

② Eine bilineare Abb. $b : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt symmetrisch

$:\Longleftrightarrow$ $b(x,y) = b(y,x) \quad \forall x,y \in V.$

In dem Fall heißt $q_b : V \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto b(x,x)$

die quadratische Form zu b.

Bem. 37.14 (Polarisierung der Bilinearform)

$$b(x,y) = \frac{1}{2} \cdot \left(q_b(x+y) - q_b(x) - q_b(y) \right)$$

Bsp. 37.15

ⓐ Skalarprodukte auf $\mathbb{R}$-VRen sind symmetrische Bilinearformen.

ⓑ $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ symmetrisch

$\Longrightarrow$ $b_A : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} : (x,y) \mapsto x^t \circ A \circ y$

ist eine symmetrische Bilinearform.

Klar: • b_A bilinear, weil Matrixprodukt linear

• $b_A(x,y) = x^t \circ A \circ y \underset{A=A^t}{=} x^t \circ A^t \circ y \underset{\text{weil } 1\times1\text{-Matrix}}{=} (x^t \circ A^t \circ y)^t$

$= y^t \circ A^{tt} \circ x^{tt} = y^t \circ A \circ x = b_A(y,x)$

Beachte: $q_A = q_{b_A} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : x \mapsto x^t \circ A \circ x \underset{x=\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}{=} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_i \cdot x_j$

Hauptachsentransformation 37.16

Sei $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ eine symmetrische Matrix.

Dann: $\exists$ ONB $B = (x_1, \dots, x_n)$ von $\mathbb{R}^n$ (bez. Standardskalarpr.)

s.d. $A \circ x_i = \lambda_i \cdot x_i$ für $i = 1, \dots, n$

und $q_A(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot \langle x_i, x \rangle^2$

Die Vektoren x_i werden die Hauptachsen von q_A genannt.

Beweis: Spektralsatz für symm. Matrizen

$\Rightarrow \exists$ ONB $B = (x_1, \dots, x_n)$ von $\mathbb{R}^n$: $A \circ x_i = \lambda_i \cdot x_i$

(d.h. $T = (x_1 | \dots | x_n) \Rightarrow T^t \circ A \circ T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$)

Sei nun $x \in \mathbb{R}^n \xRightarrow[\text{Parseval}]{} x = \sum_{i=1}^{n} \langle x_i, x \rangle \cdot x_i$

$$\Rightarrow q_A(x) = x^t \circ A \circ x = x^t \circ A \circ \sum_{i=1}^{n} \langle x, x_i \rangle \cdot x_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \langle x, x_i \rangle \cdot x^t \circ \underbrace{A \circ x_i}_{= \lambda_i \cdot x_i} = \sum_{i=1}^{n} \langle x, x_i \rangle \cdot \lambda_i \cdot \underbrace{x^t \circ x_i}_{\overset{\shortparallel}{\langle x, x_i \rangle}}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot \langle x, x_i \rangle^2$$

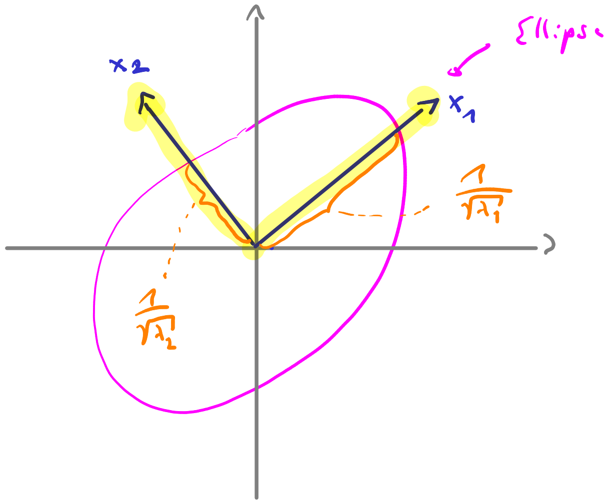
□

Bemerkung 37.17 (Geometrische Interpretation)

Sei $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ symmetrisch.

$\Rightarrow S_{q_A} := \{ y \in \mathbb{R}^n \mid q_A(y) = 1 \}$

$T^t \circ A \circ T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$, $\underset{O(n)}{\underset{\cap}{T = (x_1 \cdots x_n)}}$



Beachte: Wenn b_A Skalarprodukt ist, dann ist S_{q_A} die Einheitssphäre in $\mathbb{R}^n$ bez. der Norm $\sqrt{q_A}$, die zu b_A gehört.

D) Positiv definite symmetrische und hermitesche Matrizen

Def. 37.18:

ⓐ Eine symmetrische Matrix $A \in Mat_n(\mathbb{R})$ heißt

- positiv definit :⇔ $x^t \circ A \circ x > 0 \quad \forall\, 0 \neq x \in \mathbb{R}^n$
- negativ definit :⇔ $x^t \circ A \circ x < 0 \quad \forall\, 0 \neq x \in \mathbb{R}^n$
- indefinit :⇔ $\exists\, x, y \in \mathbb{R}^n : \begin{cases} x^t \circ A \circ x > 0 \\ y^t \circ A \circ y < 0 \end{cases}$

ⓑ Eine hermitesche Matrix $A \in Mat_n(\mathbb{C})$ heißt

- positiv definit :⇔ $\overline{x}^t \circ A \circ x > 0 \quad \forall\, 0 \neq x \in \mathbb{C}^n$
- negativ definit :⇔ $\overline{x}^t \circ A \circ x < 0 \quad \forall\, 0 \neq x \in \mathbb{C}^n$
- indefinit :⇔ $\exists\, x, y \in \mathbb{C}^n : \begin{cases} \overline{x}^t \circ A \circ x > 0 \\ \overline{y}^t \circ A \circ y < 0 \end{cases}$

ⓒ Sei $A \in Mat_n(\mathbb{K})$ und $A(k)$ entstehe aus A durch das Streichen der letzte $n-k$ Zeilen & Spalten.
Dann heißt $A(k)$ die k-te Hauptmatrix und
$\det(A(k))$ der k-te Hauptminor von A.

Bem. 37.19

A ist negativ definit ⇔ $-A$ ist positiv definit

Satz 37.21 (Hurwitz-Kriterium)

Sei $A \in Mat_n(\mathbb{K})$ symmetrisch bzw. hermitesch.
Dann sind $\circlearrowright$:

ⓐ A ist positiv definit

ⓑ Alle Eigenwerte von A sind positiv.

ⓒ Alle Hauptminoren von A sind positiv.

Bsp. 37.23:

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ist positiv definit}$$

Denn:

- $A(1) = (7) \Rightarrow \det(A(1)) = 7 > 0$
- $A(2) = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(2)) = 7 \cdot 3 - 1 \cdot 1 = 20 > 0$
- $A(3) = A \Rightarrow \det(A(3)) = \det(A)$
  $= 7 \cdot 3 \cdot 1 - 1 \cdot 7 - 1 = 13 > 0$

Lemma 37.20

Sei $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$ symmetrisch bzw. hermitesch und $T \in GL_n(\mathbb{K})$.

Dann: A ist positiv definit $\Leftrightarrow$ $\underbrace{T^* \circ A \circ T}_{\text{ist symmetrisch bzw. hermitesch}}$ ist positiv definit

Beweis:

Beachte:

- $(T^* \circ A \circ T)^* = T^* \circ A^* \circ T^{**} \underset{A = A^*}{=} T^* \circ A \circ T$
- $\mathbb{K}^n \setminus \{0\} \underset{\text{T ist invertierbar}}{=} \{T \circ x \mid x \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}\}$

Damit:

A ist pos. definit $\Leftrightarrow \bar{x}^t \circ A \circ x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$

$\Leftrightarrow \overline{(T \circ x)}^t \circ A \circ (T \circ x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$

$\Leftrightarrow \bar{x}^t \circ (T^* \circ A \circ T) \circ x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$

$\Leftrightarrow T^* \circ A \circ T$ ist positiv definit. □

Bem. 37.22:

- A ist negativ definit $\Leftrightarrow$ alle EWe sind negativ
- A ist indefinit $\Leftrightarrow$ A hat einen positiven und einen negativen Eigenwert

Bem. 37.24

$A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ symmetrisch und pos. definit

$\iff b_A$ ist Skalarprodukt.

Beweis von 37.21

(a) $\iff$ (b):

- $A = A^* \longrightarrow \exists \overset{\overset{(x_1 \dots x_n)}{\parallel}}{T} \in O(n)$ bzw. $U(n)$: $\underset{\underset{T^{-1} \circ A \circ T}{\parallel}}{T^* \circ A \circ T} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$

$\implies \lambda_1, \dots, \lambda_n$ sind die EWe von A

- "$\implies$" Sei A positiv definit

$\implies \lambda_i = \bar{x}_i^t \circ A \circ x_i > 0$

- "$\impliedby$": $T \in O(n)$ bzw. $U(n) \implies B = (x_1, \dots, x_n)$ ist ONB von $\mathbb{K}^n$

- Sei $0 \neq x \in \mathbb{K}^n$. z.z.: $\bar{x}^t \circ A \circ x > 0$

Sei $M_B(x) = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, d.h. $x = \sum_{i=1}^n \mu_i \cdot x_i$.

Beachte: $T = T_E^B$

$\implies T \circ M_B(x) = T_E^B \circ M_B(x) = T_E(x) = x$

$\implies \bar{x}^t \circ A \circ x = \left(\overline{T \circ M_B(x)}\right)^t \circ A \circ \left(T \circ M_B(x)\right)$

$= \overline{M_B(x)}^t \circ \underbrace{\bar{T}^t \circ A \circ T} \circ M_B(x)$

$= (\bar{\mu}_1, \dots, \bar{\mu}_n) \circ \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix}$

$= \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot \underbrace{\bar{\mu}_i \cdot \mu_i}_{\overset{\parallel}{|\mu_i|^2}} = \sum_{i=1}^n \underbrace{\lambda_i}_{>0} \cdot \underbrace{|\mu_i|^2}_{\substack{>0 \\ \text{für mindestens ein } i}} > 0$

$\implies A$ ist positiv definit.

ⓐ ⇒ ⓒ: Beachte: mit ⓐ können wir auch ⓑ voraussetz

- A hermitesch (Symm. oder) und $T \in O(n)$ bzw. $U(n)$:

$$\underset{T^{-1}\circ A\circ T}{\underset{\parallel}{T^{*}\circ A\circ T}} = \begin{pmatrix}\lambda_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\end{pmatrix}$$ und $\lambda_i > 0$ $\forall i = 1,\dots,n$

$$\underset{\substack{\uparrow\\ A \text{ pos. definit}}}{\Longrightarrow} \underset{\det(A(n))}{\underset{\parallel}{\det(A)}} = \det(T^{-1}\circ A\circ T) = \lambda_1\cdots\lambda_n > 0$$

- $A(k) \in \mathrm{Mat}_k(\mathbb{K})$ ist symmetrisch bzw. hermitesch

und $A(k)$ ist positiv definit,

denn: für $\overset{\overset{0}{\neq}}{u} \in \mathbb{K}^k$ gilt

$$\bar{u}^t \circ A(k) \circ u = (u_1,\dots,u_k,0,\dots,0) \circ A \circ \begin{pmatrix}u_1\\ \vdots\\ u_k\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix} \underset{\substack{\uparrow\\ A \text{ pos. definit.}}}{>} 0$$

Damit: $\det(A(k)) \underset{\substack{\uparrow\\ \text{s.o.}}}{>} 0$

ⓒ ⇒ ⓐ: Induktion nach n:

n = 1: $A = (a_{11})$ mit $a_{11} = \det(A) > 0$ und a_{11} ist EW von A

$\underset{ⓑ\Leftrightarrow ⓒ}{\Longrightarrow}$ A ist pos. definit

$n-1 \mapsto n$: • $A(n-1)$ hat nur pos. Hauptminoren

$\underset{\text{Ind.}}{\Longrightarrow}$ $A(n-1)$ ist pos. definit

- $A(n-1)$ symm. bzw. hermitesch

$\Longrightarrow S \in O(n-1)$ bzw. $U(n-1)$: $\underset{}{\overset{S^{-1}\circ A(n-1)\circ S}{\overset{\parallel}{S^{*}\circ A(n-1)\circ S}}} = \begin{pmatrix}\lambda_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_{n-1}\end{pmatrix}$

$\Longrightarrow \lambda_1,\dots,\lambda_{n-1}$ sind die EWe von $A(n-1)$

$\underset{\substack{\uparrow\\ ⓐ\Leftrightarrow ⓑ}}{\Longrightarrow} \lambda_1,\dots,\lambda_{n-1} > 0$

· Setze: $T = \left(\begin{array}{c|c} S & \begin{matrix}0\\ \vdots\\ 0\end{matrix} \\ \hline 0 \cdots 0 & 1 \end{array}\right) \in Gl_n(\mathbb{K})$

$$\begin{pmatrix}\lambda_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_{n-1}\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \quad T^* \circ A \circ T = \left(\begin{array}{c|c} S^* \circ A(n-1) \circ S & \begin{matrix}a_1\\ \vdots\\ a_{n-1}\end{matrix} \\ \hline \bar{a}_1 \cdots \bar{a}_{n-1} & a_n \end{array}\right)$ $\in \mathbb{R}$

· Setze: $C = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{1}_{n-1} & \begin{matrix}c_1\\ \vdots\\ c_{n-1}\end{matrix} \\ \hline 0 \cdots 0 & 1 \end{array}\right)$ mit $c_i = -\frac{a_i}{\lambda_i}$ für $i=1,\dots,n-1$

$\Rightarrow \quad E := (T\circ C)^* \circ A \circ (T \circ C) = C^* \circ T^* \circ A \circ T \circ C$

$$= C^* \circ \left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix}\lambda_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_{n-1}\end{matrix} & \begin{matrix}a_1\\ \vdots\\ a_{n-1}\end{matrix} \\ \hline \bar{a}_1 \cdots \bar{a}_{n-1} & a_n \end{array}\right) \circ C = \begin{pmatrix}\lambda_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\end{pmatrix}$$

mit $\lambda_n \in \mathbb{R}$ geeignet!

$\Rightarrow$ E ist symm. bzw. hermitesch mit Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n > 0$, denn $\lambda_n \cdot \lambda_{n-1} \cdots \lambda_1 = \det(E)$

$$\det(E) = \det(A) \cdot \det((T\circ C)^*) \cdot \det(T \circ C)$$
$$= \det(A) \cdot \overline{\det(T\circ C)} \circ \det(T\circ C)$$
$$= \underbrace{\det(A)}_{>0} \cdot \underbrace{|\det(T\circ C)|^2}_{>0} > 0$$

$\Rightarrow$ E ist pos. definit

$\overset{(a)\Leftrightarrow(b)}{\Longrightarrow}$

$\underset{37.20}{\Longrightarrow}$ A ist pos. definit.

$\boxtimes$

§ 38 Singulärwertzerlegung

Satz 38.1

Sei $A \in Mat(m \times n, \mathbb{R})$ vom Rang r.

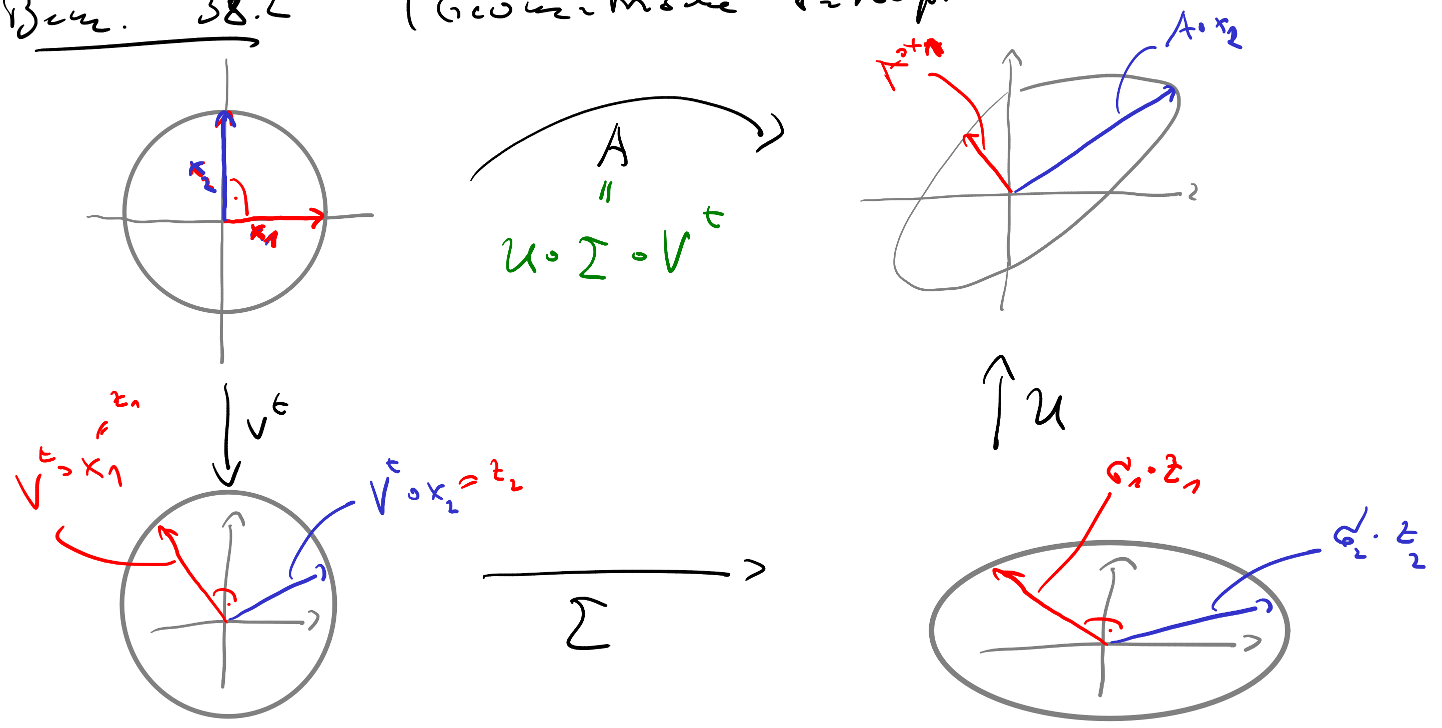
Dann: $\exists\ U \in O(m)$ und $V \in O(n)$ und $\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_r > 0$

sodass: $$A = U \circ \Sigma \circ V^t$$ Singulärwertzerlegung von A

mit $$\Sigma = \left(\begin{array}{cc|c} \sigma_1 & \ddots\ 0 & 0 \\ 0 & \sigma_r & \\ \hline 0 & & 0 \end{array}\right) \in Mat(m \times n, \mathbb{R})$$

- Spalten von U = linke Singulärvektoren
- " " V = rechte "
- $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ heißen Singulärwerte von A

Bem. 38.2 (Geometrische Interpretation)



Beachte: $U = (x_1 \cdots x_m)$, $V = (y_1 \cdots y_n)$

$\Rightarrow$ • $A = U \circ \Sigma \circ V^t = \sum_{i=1}^{r} \sigma_i \cdot \underbrace{x_i \circ y_i^t}_{\in Mat(m \times n, \mathbb{R})}$ hat rang 1

• $A \circ y_i = \sigma_i \cdot x_i \quad \forall i = 1, \dots, r$

Bem 38.3

ⓐ $A \in Mat_n(\mathbb{R}) \begin{Bmatrix} + \text{pos. definit} \\ \text{symmetrisch} \end{Bmatrix} \Rightarrow \exists\ T \in O(n): T^t \circ A \circ T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$

$\Rightarrow U = T$ und $V = T$ und $\lambda_i = d_i$

ⓑ A symm. $\Rightarrow$ Singulärwerte = Beträge der $\underset{\neq 0}{\text{Eigenwerte}}$

ⓒ $A = U \circ \Sigma \circ V^t$ Singulärwertzerlegung von A

$$\Rightarrow A^t \circ A = (U \circ \Sigma \circ V^t)^t \circ (U \circ \Sigma \circ V^t)$$

$$= \underset{V}{\overset{\shortparallel}{V^{tt}}} \circ \Sigma^t \circ \underbrace{U^t \circ U}_{= 1\!\!1_m} \circ \Sigma \cdot V^t$$

$$= V \circ \underbrace{(\Sigma^t \circ \Sigma)}_{\shortparallel \begin{pmatrix} d_1^2 & & & 0 \\ & d_2^2 \ddots & & \\ & & d_r^2 \ 0 & \\ 0 & & & \ddots 0 \end{pmatrix}} \circ V^t$$ hat EWe $d_1^2, \dots, d_r^2$ und evtl. 0

$\Rightarrow d_1, \dots, d_r$ hängen nur von A ab!

Gilt auch für $A \circ A^t$!

Lemma 38.4

Sei $A \in Mat(m \times n, \mathbb{R})$.

Dann:
- $A^t \circ A$ ist symmetrisch
- alle EWe von $A^t \circ A$ sind nicht-negativ
- $\text{rang}(A^t \circ A) = \text{rang}(A)$

Gilt alles auch für $A \circ A^t$.

Beweis:

- $(A^t \circ A)^t = A^t \circ A^{tt} = A^t \circ A \Rightarrow A^t \circ A$ symmetrisch
- Sei λ EW von $A^t \circ A$ mit Eigenvektor $\overset{\neq 0}{x} \in \mathbb{R}$.

$$\Rightarrow \lambda \cdot \underbrace{\langle x, x \rangle}_{= \|x\|^2 > 0} = \lambda \cdot x^t \circ x = x^t \circ (\lambda x) = x^t \circ A^t \circ A \circ x = \langle Ax, Ax \rangle \geq 0$$

$$\Rightarrow \lambda \geq 0$$

- Zeige: $\mathrm{Ker}(A^t \circ A) = \mathrm{Ker}(A)$

"$\supseteq$" $x \in \mathrm{Ker}(A) \Rightarrow A^t \circ A \circ x = A^t \circ 0 = 0 \Rightarrow x \in \mathrm{Ker}(A^t \circ A)$

"$\subseteq$" $x \in \mathrm{Ker}(A^t \circ A) \Rightarrow A^t \circ A \circ x = 0$

$$\Rightarrow 0 = x^t \circ A^t \circ A \circ x = \langle Ax, Ax \rangle = \|Ax\|^2$$

$$\Rightarrow Ax = 0 \Rightarrow x \in \mathrm{Ker}(A).$$

- Also: $\mathrm{rang}(A^t \circ A) = n - \dim_{\mathbb{R}}(\mathrm{Ker}(f_{A^t \circ A}))$

$$= n - \dim_{\mathbb{R}}(\mathrm{Ker}(f_A)) = \mathrm{rang}(A). \quad \square$$

Beweis von 38.1

$$\left.\begin{array}{l}\text{Spektralsatz}\\ \text{angewendet auf } A^t \circ A\end{array}\right\} \Rightarrow \exists\, V \in O(n): V^t \circ A^t \circ A \circ V = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

mit $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ EWe von $A^t \circ A$

$$\underset{38.4}{\Rightarrow} \text{ o.E. } \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \dots \geq \lambda_r > \lambda_{r+1} = \dots = \lambda_n = 0$$

$r = \mathrm{rang}(A) = \mathrm{rang}(A^t \circ A)$ und alle EWe ≥ 0

$$\Rightarrow A^t \circ A = V \circ \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \circ V^t$$

Setze:
- $\sigma_i := \sqrt{\lambda_i} > 0$ für $i = 1, \dots, r$
- $x_i := \frac{1}{\sigma_i} \cdot A \circ y_i$ für $i = 1, \dots, r$ wobei $V = (y_1 \dots y_n)$

$$\Rightarrow \langle x_i, x_j \rangle = \frac{1}{\sigma_i \cdot \sigma_j} \cdot (A \cdot y_i)^t \circ (A y_j)$$

$$= \frac{1}{\sigma_i \cdot \sigma_j} \cdot y_i^t \circ \underbrace{\boxed{A^t \circ A \circ y_j}}_{\lambda_j \cdot y_j} = \frac{\lambda_j}{\sigma_i \cdot \sigma_j} \cdot \underbrace{y_i^t \circ y_j}_{\begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & i \neq j \end{cases}} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}$$

$\Rightarrow (x_1, \dots, x_r)$ ist orthonormal

$\Rightarrow$ ergänze zu ONB $(x_1, \dots, x_m)$ mit GS

- **Setze:** $U = (x_1 \cdots x_m) \in O(m)$

Damit: $U \circ \Sigma \circ V^t = \boxed{\sum_{i=1}^{r} \underbrace{\sigma_i \cdot x_i}_{=A\circ y_i} \circ y_i^t} = \sum_{i=1}^{r} A \circ y_i \circ y_i^t \overset{A^t\circ A\circ y_i = 0 \text{ für } i=r+1,\dots,n \Rightarrow A\circ y_i = 0}{=} \sum_{i=1}^{n} A \circ y_i \circ y_i^t = A \circ \underbrace{\sum_{i=1}^{n} y_i \circ y_i^t}_{= \mathbb{1}_n} = \underbrace{A \circ \mathbb{1}_n}_{= A}$

☐

Kor. 38.5

Zu 38.1 gilt:

- $\operatorname{Im}(A) = \operatorname{Lin}(x_1, \dots, x_r)$
- $\operatorname{Ker}(A) = \operatorname{Lin}(y_{r+1}, \dots, y_n)$

Bsp. 38.7

Berechne eine SWZ von: $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

① $A^t \circ A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \in \operatorname{Mat}_3(\mathbb{R})$

② $\chi_{A^t\circ A} = \begin{vmatrix} t-1 & 1 & 0 \\ 1 & t-2 & 1 \\ 0 & 1 & t-1 \end{vmatrix} = t \cdot (t-1) \cdot (t-3)$

$\Rightarrow$ $A^t \circ A$ hat die EWe $0, 1, 3$

$\Rightarrow$ A hat Singulärwerte $\underbrace{\sqrt{1} = 1}_{=\sigma_2}, \underbrace{\sqrt{3}}_{=\sigma_1}$

③ Berechne die Eigenvektoren von $A^t \circ A$ zu $0, 1, 3$

$\operatorname{Eig}(A^t\circ A, 3) = \operatorname{Lin}\left(\underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}}_{= z_1}\right)$, $\operatorname{Eig}(A^t\circ A, 1) = \operatorname{Lin}\left(\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}}_{= z_2}\right)$, $\operatorname{Eig}(A^t\circ A, 0) = \operatorname{Lin}\left(\underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}}_{= z_3}\right)$

④ Bestimme für jeden Eigenraum eine ONB mit GS

$$\left.\begin{aligned} y_1 &:= \frac{1}{\|z_1\|} \cdot z_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \\ y_2 &:= \frac{1}{\|z_2\|} \cdot z_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \\ y_3 &:= \frac{1}{\|z_3\|} \cdot z_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \end{aligned}\right\} \Rightarrow V = (y_1\ y_2\ y_3) = \underset{\substack{\cap \\ O(3)}}{\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}}$$

⑤

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{\sigma_1} \cdot A \circ y_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ x_2 &= \frac{1}{\sigma_2} \cdot A \circ y_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \mathcal{U} = \underset{\substack{\shortparallel \\ \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}}}{(x_1\ x_2)}$$

Nachrechnen:

$$\mathcal{U} \circ \underset{\substack{\shortparallel \\ \Sigma}}{\begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \end{pmatrix}} \circ V^t = A$$