

Mathematik für Physiker:innen 1

Abgabetermin: Donnerstag, 22.10.2026, 12:00

Aufgabe 1:

(a) Bestimme die Menge $(h \circ g \circ f)^{-1}(B)$ für $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 3\}$ und

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x \mapsto (x, x - 2),$$

$$g: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{R} : (x, y) \mapsto \begin{cases} (1, x \cdot y), & \text{wenn } x > y \\ (-1, x \cdot y), & \text{wenn } x \leq y, \end{cases}$$

$$h: \mathbb{Z} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : (z, x) \mapsto x^z.$$

Aufgabe 2: Überprüfe **zwei** der folgenden Abbildungen auf Injektivität, Surjektivität und Bijektivität:

(a) $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{x^2+1},$

(b) $g: \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\} : x \mapsto \frac{1}{x},$

(c) $h: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto 2x + y,$

(d) $k: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R} : (x, y) \mapsto (x + y, x - y).$

Zeige oder widerlege jeweils, daß die Abbildung die jeweilige Eigenschaft besitzt, und gib im Falle der Bijektivität auch die Umkehrabbildung an.

Aufgabe 3: Beweise mittels vollständiger Induktion:

(a) $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(b) Sei $a \in \mathbb{N}$. Zeige, dass $a^{2n+1} - a$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ durch 6 teilbar ist.

Präsenzaufgabe 5: Es seien M eine Menge und $\mathcal{P}(M) = \{A \mid A \subseteq M\}$ die Potenzmenge von M . Zeige, es gibt keine surjektive Abbildung $f: M \longrightarrow \mathcal{P}(M)$.

Hinweis zu Teil (b): betrachte die Menge der $x \in M$ für die $x \notin f(x)$ gilt.

Präsenzaufgabe 6: Beweise, dass die Menge $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \{(0, 0)\}$ zusammen mit der Verknüpfung $(a, b) \cdot (a', b') = (aa' - bb', ab' + ba')$ für $a, a', b, b' \in \mathbb{R}$ eine Gruppe definiert.