

Mathematik für Physiker:innen 1

Abgabetermin: Donnerstag, 29.10.2026, 12:00

Aufgabe 4: Es sei M eine Menge. Wir definieren auf der Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ ein Relation durch

$$A \sim B \iff A \triangle B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \text{ ist endlich.}$$

- (a) Zeige, $\sim$ ist eine Äquivalenzrelation.
- (b) Bestimme für $M = \mathbb{N}$ die Äquivalenzklassen von $\mathbb{N}$ und $\emptyset$.
- (c) Überprüfe, ob die Mengen der geraden und der ungeraden Zahlen äquivalent zueinander sind.
- (d) Für welche Mengen M ist $\sim$ zugleich eine Ordnungsrelation.

Aufgabe 5: Sei M eine Menge und

$$A := \{f \mid f : \{0, 1\} \rightarrow M \text{ Abbildung}\}.$$

Zeige:

- (a) A ist gleichmächtig zum kartesischen Produkt $M \times M$.
- (b) Ist M abzählbar unendlich, so ist A abzählbar unendlich.

Aufgabe 6: Wir definieren auf $G := \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ eine Operation durch

$$\circ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto x + y + x \cdot y.$$

- (a) Zeige, $(\mathbb{R}, \circ)$ ist eine abelsche Gruppe.
- (b) Zeige, die Abbildung

$$\alpha : G \longrightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\} : x \mapsto x + 1$$

ist bijektiv und es gilt

$$\alpha(x \circ y) = \alpha(x) \cdot \alpha(y).$$

Man nennt α dann einen Gruppenisomorphismus.

Präsenzaufgabe 7: Beweise die folgenden Gleichungen für jedes $n \in \mathbb{N}$.

(a) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\sum_{k=0}^n (-1)^k \cdot \binom{n}{k} = 0$.

(b) Für alle $n \in \mathbb{N}$ und $0 \leq r \leq n$ gilt $\sum_{k=r}^n \binom{k}{r} = \binom{n+1}{r+1}$.

Präsenzaufgabe 8:

(a) Schreibe die folgenden Mengen als Vereinigung von Intervallen:

(1) $A_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - 1| < 1 \vee |x + 2| \leq 2\}$.

(2) $A_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - 1| > 1 \wedge |x + 2| \leq 2\}$.

(3) $A_3 = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 2 \leq 2 \vee \sqrt{|x - 10|} > 5\}$.

(b) Überprüfe zudem jede der Mengen in Teil (a) sowie die folgende Menge, ob sie nach oben oder unten beschränkt ist, gib ggf. das Infimum oder Supremum der Menge an und überprüfe auch, ob es ein Minimum oder Maximum ist:

$$M = \left\{ \frac{m-n}{m+n} \mid 0 \neq m, n \in \mathbb{N} \right\}.$$