Mathematik für Physiker 2

Die Übungen von Blatt 1 werden in den Übungsstunden der ersten Vorlesungswoche als Präsenzaufgaben bearbeitet und besprochen.

Aufgabe 1: Überprüfe, ob die Menge $G = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ mit der folgenden zweistelligen Operation eine Gruppe ist:

$$G \times G \longrightarrow G : \big((a,b),(a',b')\big) \mapsto (a,b)\cdot(a',b') := (aa', bb').$$

Aufgabe 2: Sei M eine Menge. Für zwei Abbildungen $f : M \to M$ und $g : M \to M$ definieren wir die *Komposition* von f und g durch

$$f \circ g : M \to M : m \mapsto f\big(g(m)\big).$$

Wir nennen eine Abbildung $f : M \to M$ *bijektiv*, wenn es eine Abbildung $f' : M \to M$ gibt, so daß

$$f \circ f' = f' \circ f = \mathrm{id}_M,$$

wobei $\mathrm{id}_M : M \to M : m \mapsto m$ die Identität auf M ist. Die Menge aller bijektiven Selbstabbildungen von M bezeichnen wir mit

$$\mathrm{Sym}(M) = \{f : M \to M \mid f \text{ ist bijektiv}\}.$$

Zeige, $\big(\mathrm{Sym}(M), \circ\big)$ ist eine Gruppe.

Aufgabe 3: Für zwei reelle Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ definieren wir die Abbildung

$$f_{a,b} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto a \cdot x + b.$$

Welche der folgenden Mengen sind Untergruppen von $\big(\mathrm{Sym}(\mathbb{R}), \circ\big)$?

(a) $U = \{f_{a,b} \mid a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0\}$,

(b) $V = \{f_{a,1} \mid a \in \mathbb{R}, a \neq 0\}$.

Aufgabe 4: Es sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe und $M \subseteq G$ eine Teilmenge. Dann gilt

$$\bigcap_{M \subseteq U \leq G} U = \left\{ g_1^{\alpha_1} \cdots g_n^{\alpha_n} \mid n \geq 0, g_1, \ldots, g_n \in M, \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{Z} \right\}$$

und man zeige, daß die Menge eine Untergruppe von G, das sogenannte *Erzeugnis* der Menge M.