Fachbereich Mathematik
Thomas Markwig

Sommersemester 2016, Blatt 4

Christoff Hische

Mathematik für Physiker 2

Abgabetermin: Montag, 02/05/2016, 12:00

Aufgabe 13: Seien V, W zwei K-Vektorräume und $f, g \in \mathrm{Hom}_K(V, W)$. Zeige

$$\mathrm{Ker}(f+g) \supseteq \mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Ker}(g)$$

und

$$\mathrm{Im}(f+g) \subseteq \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Im}(g).$$

Finde außerdem Beispiele, sodass die Inklusionen strikt sind.

Aufgabe 14: Ist V ein K-Vektorraum, $f\colon V \to V$ K-linear und $U \leq V$ ein Unterraum von V mit $f(U) \subseteq U$, so nennen wir U einen f-*invarianten* Unterraum von V.
Zeige, dass durch

$$f_{V/U}\colon V/U \to V/U : \bar{x} \mapsto \overline{f(x)}$$

eine K-lineare Abbildung definiert wird.

Aufgabe 15: (Erster Isomorphiesatz)
Sei V ein K-Vektorraum und $U, U' \leq V$. Zeige

$$U/(U \cap U') \cong (U + U')/U'.$$

Aufgabe 16: (Projektionen)
Sei V ein K-Vektorraum. $f \in \mathrm{End}_K(V)$ heißt *Projektion*, falls $f^2 = f$ gilt.
Zeige die Äquivalenz folgender Aussagen:

a) f ist eine Projektion.

b) $\mathrm{id}_V - f$ ist eine Projektion.

c) Es gilt $\mathrm{Im}(\mathrm{id}_V - f) = \mathrm{Ker}(f)$.

d) Es gilt $\mathrm{Ker}(\mathrm{id}_V - f) = \mathrm{Im}(f)$.

Zeige weiter, sind obige Bedingungen erfüllt, so gilt zudem $V = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$.