Fachbereich Mathematik Sommersemester 2016, Blatt 5
Thomas Markwig Christoff Hische

# Mathematik für Physiker 2

Abgabetermin: Montag, 09/05/2016, 12:00

**Aufgabe 17:**

a) Entscheide welche der folgenden Familien von Vektoren linear unabhängig / Erzeugendensysteme / Basen von $\mathbb{R}^2$ sind:

1) $((1,2)^t)$
2) $((1,2)^t, (0,0)^t)$
3) $((1,1)^t, (1,-2)^t)$
4) $((1,1)^t, (0,0)^t, (1,-2)^t)$

b) Seien $V$ ein $K$-Vektorraum mit $\dim_K(V) = 5$ und $U$ bzw. $U'$ Untervektorräume mit $\dim_K(U) = 3$ bzw. $\dim_K(U') = 4$.

1) Welche Werte kann $\dim_K(U \cap U')$ annehmen?
2) Gib für jeden der Werte von $\dim_K(U \cap U')$ ein Beispiel $(K, V, U, U')$ an.

**Aufgabe 18:** Es seien $V$ und $W$ zwei $K$-Vektorräume, $f\colon V \to W$ eine $K$-lineare Abbildung und $B$ eine Basis von $V$. Zeige folgende Aussagen:

a) Genau dann ist $f$ surjektiv, wenn $f(B)$ ein Erzeugendensystem von $W$ ist.

b) Genau dann ist $f$ injektiv, wenn $f(B)$ linear unabhängig ist.

c) Genau dann ist $f$ bijektiv, wenn $f(B)$ eine Basis von $W$ ist.

**Aufgabe 19:** Seien $V$ ein $K$-Vektorraum und $x_1, .., x_n \in V$ linear abhängige Vektoren mit der Eigenschaft, dass je $n-1$ von ihnen linear unabhängig sind. Zeige, dass es $\lambda_1, .., \lambda_n \in K \setminus \{0\}$ mit der Eigenschaft $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = 0$ gibt.

**Aufgabe 20:** Sei $B := ((3,5,2)^t, (1,1,-1)^t, (2,4,1)^t)$ eine Familie von Vektoren in $\mathbb{R}^3$.

a) Zeige $B$ ist eine Basis von $\mathbb{R}^3$.

b) Ersetze mit Hilfe des *Austauschsatzes von Steinitz* zwei Vektoren in $B$ durch die Vektoren $(1,3,2)^t$ und $(-2,1,2)^t$.