Fachbereich Mathematik
Thomas Markwig Sommersemester 2016, Blatt 6
Christoff Hische

Mathematik für Physiker 2

Abgabetermin: Montag, 23/05/2016, 12:00

Aufgabe 21:

a) Sei V ein K-Vektorraum mit $1 \leq \dim_K(V) = n < \infty$ und $g \in \mathrm{End}_K(V)$. Dann gibt es eine Zahl $0 \leq k \leq n$ mit

$$\mathrm{Ker}(g^0) \subsetneq \mathrm{Ker}(g^1) \subsetneq \cdots \subsetneq \mathrm{Ker}(g^k) = \mathrm{Ker}(g^{k+i})$$

für alle $i \geq 1$.

b) Seien $A \in \mathrm{Mat}(n \times p, K)$ und $B \in \mathrm{Mat}(m \times n, K)$, dann gilt

$$\mathrm{rang}(B \circ A) \leq \min\{\mathrm{rang}(A), \mathrm{rang}(B)\}.$$

Aufgabe 22:
Sei K ein Körper.

a) Zeige, dass die Mengen $U := \{(a_1, .., a_n)^t \in K^n | a_1 = \cdots = a_n\}$ und $U' := \{(a_1, .., a_n)^t \in K^n | a_1 + \cdots + a_n = 0\}$ Unterräume von K^n sind.

b) Bestimme $\dim_K(U), \dim_K(U')$ und $\dim_K(U + U')$.

Aufgabe 23: (Zyklische Unterräume)
Seien $f \in \mathrm{End}_K(V), 0 \neq x \in V$ und $m \in \mathbb{N}$ mit $f^{m-1}(x) \neq 0$ und $f^m(x) = 0$.

a) Zeige, $B := (f^{m-1}(x), f^{m-2}(x), .., f(x), x)$ ist eine Basis von $U := \mathrm{Lin}(B)$.

b) Zeige, U ist f-invariant.

c) Bestimmte $M_B^B(f_U)$.

Wir nennen U einen *zyklischen Unterraum von* V.

Aufgabe 24: Betrachte den Vektorraum P_n der Polynome vom Grad höchstens n aus der Vorlesung mit der Basis $B := (t^0, t^1, .., t^n)$ und die formale Ableitung

$$d\colon P_n \to P_n, \sum_{k=0}^{n} a_k t^k \mapsto \sum_{k=1}^{n} k \cdot a_k t^{k-1}.$$

Wir wissen bereits, dass d eine K-lineare Abbildung ist.

a) Berechne die Matrixdarstellung $M_B^B(d)$ und den Rang von d.

b) Zeige, dass für $n = 3$ auch $D := (t^0, t^0 + t^1, t^1 + t^2, t^2 + t^3)$ eine Basis von P_3 ist und berechne den Basiswechsel T_B^D und T_D^B sowie die Matrixdarstellung $M_D^D(d)$.