Fachbereich Mathematik
Thomas Markwig

Sommersemester 2016, Blatt 8
Christoff Hische

Mathematik für Physiker 2

Abgabetermin: Montag, 06/06/2016, 12:00

Aufgabe 29: Seien $B := ((1,1,1)^t, (1,1,0)^t, (1,0,-1)^t)$, $B' := ((2,1)^t, (1,1)^t)$, E bzw. E' die kanonischen Basen von $\mathbb{R}^3$ bzw. $\mathbb{R}^2$ und $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ gegeben durch $f((x,y,z)^t) := (x-y+z, 2x+y)^t$.

a) Zeige, dass B und B' Basen des $\mathbb{R}^3$ bzw. des $\mathbb{R}^2$ sind.

b) Bestimmte $M^E_{E'}(f)$.

c) Bestimme $M^B_{B'}(f)$ sowie die Transformationsmatrizen T^B_E und $T^{E'}_{B'}$, mit

$$T^{E'}_{B'} \cdot M^E_{E'}(f) \cdot T^B_E = M^B_{B'}(f).$$

Aufgabe 30: Seien V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum, $B := (x_1, x_2, x_3)$ eine Basis von V und $B' := (y_1, y_2, y_3)$ mit $y_1 := x_1 + x_3$, $y_2 := x_1 + x_2$, $y_3 := x_1 + x_2 + x_3$. Zeige, dass B' eine Basis von V ist und bestimme $M^{B'}_{B'}(f)$, wobei $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V)$ gegeben ist durch

$$M^B_B(f) := \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ -b & a & a \\ a & b & b \end{pmatrix} \text{ mit } a, b \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 31: Betrachte die Permutationen

$$\sigma := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 6 & 3 & 7 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad \pi := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 2 & 7 & 1 & 4 & 3 & 6 \end{pmatrix} \in \mathbb{S}_7$$

a) Berechne $\sigma \circ \pi, \pi \circ \sigma, \sigma^{-1}$ und π^{-1}.

b) Bestimme für jede der Permutationen aus a) die Zyklenzerlegung und das Signum.

c) Schreibe $\sigma \circ \pi$ als ein Produkt von Transpositionen.

d) Schreibe π^{-1} als ein Produkt von Transpositionen aufeinanderfolgender Zahlen.

Aufgabe 32: Berechne die Determinanten der folgenden Matrizen:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -3 & 8 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$$

$$C := \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad D := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{R})$$