Fachbereich Mathematik
Thomas Markwig

Sommersemester 2016, Blatt 9

Christoff Hische

Mathematik für Physiker 2

Abgabetermin: Montag, 13/06/2016, 12:00

Aufgabe 33: Seien $A \in \mathrm{Mat}_5(\mathbb{R})$ und $B \in \mathrm{Mat}_4(\mathbb{R})$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 5 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Berechne die Determinante von A mit Hilfe des Gauß-Algorithmus.

b) Berechne die Determinante von B mit Hilfe des Determinantenentwicklungssatzes.

Aufgabe 34:
Sei $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ mit ungeradem $n \in \mathbb{N}$ und $A^t = -A$. Zeige, A ist nicht invertierbar. Bleibt die Aussage wahr, wenn wir $\mathbb{R}$ durch einen anderen Körper ersetzen?

Aufgabe 35: (Nilpotente Endomorphismen und Matrizen)
Seien V ein K-Vektorraum mit $\dim(V) = n < \infty$, $A \in \mathrm{Mat}_n(K)$ und $f \in \mathrm{End}_K(V)$.

a) Zeige, gibt es ein $r \in \mathbb{N}$ mit $f^r = 0$, so gilt $\mathrm{Spur}(f) = 0$.

b) Zeige, gibt es ein $r \in \mathbb{N}$ mit $A^r = 0$, so gilt $\mathrm{Spur}(A) = 0$.

c) Finde ein Beispiel für eine Matrix wie in Teil b), bei der nicht alle Diagonalelemente Null sind.

Aufgabe 36:
Seien V ein K-Vektorraum, $f \in \mathrm{End}_K(V)$ und $x_1, .., x_r \in V$ Eigenvektoren von f zu paarweise verschiedenen Eigenwerten $\lambda_1, .., \lambda_r \in K$.

a) Zeige, dass die Familie $(x_1, .., x_r)$ linear unabhängig ist.

b) Zeige, dass insbesondere $\mathrm{Eig}(f, \lambda_1) + \cdots + \mathrm{Eig}(f, \lambda_r) = \mathrm{Eig}(f, \lambda_1) \bigoplus \cdots \bigoplus \mathrm{Eig}(f, \lambda_r)$ gilt.