Mathematik für Physiker 2

Abgabetermin: Montag, 11/07/2016, 12:00

Aufgabe 49: Bestimme eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}$-Vektorraums

$$U := \{(v, w, x, y, z) \in \mathbb{R}^5 \mid v + w + x + y + z = 0\}$$

bezüglich des Standardskalarproduktes auf $\mathbb{R}^5$.

Aufgabe 50: Bestimme eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}$-Vektorraums

$$U := \{f\colon [0, 1] \to \mathbb{R}, x \mapsto ax^2 + bx + c \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$$

bezüglich des Skalarproduktes $\langle f, g\rangle := \int_0^1 f(t)g(t)dt$.

Aufgabe 51: Für $V := \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ definieren wir $\langle\cdot,\cdot\rangle\colon V \times V \to \mathbb{R}, (A, B) \mapsto \mathrm{Spur}(A^t \circ B)$.

a) Zeige, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ist ein Skalarprodukt auf V.

b) Zeige, für $U = \{A \in V | A^t = A\}$ gilt $U^\perp = \{A \in V | A^t = -A\}$.

Aufgabe 52: Es sei V ein endlich-dimensionaler euklidischer oder unitärer Raum. Dann gibt es für jedes $g \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, \mathbb{K})$ genau ein $y \in V$, sodass für alle $x \in V$ gilt

$$g(x) = \langle y, x\rangle.$$