Fachbereich Mathematik
Thomas Markwig

Christoff Hische

Mathematik für Physiker 2

Abgabetermin: Montag, 18/07/2016, 12:00

Aufgabe 53: Bestimme eine orthogonale Matrix $T \in O(3)$, die die folgende symmetrische Matrix $A \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{R})$ diagonalisiert:

$$A := \begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 54: Sei V ein euklidischer oder unitärer Vektorraum.

a) Zeige die Polarisationsidentitäten, d.h.

   i) Falls V euklidisch gilt für $x, y \in V$

$$2 \cdot \langle x, y \rangle = ||x + y||^2 - ||x||^2 - ||y||^2$$

   ii) Falls V unitär gilt für $x, y \in V$

$$4 \cdot \langle x, y \rangle = ||x + y||^2 - ||x - y||^2 + i||x - iy||^2 - i||x + iy||^2$$

b) Beweise die Besselsche Ungleichung: Ist $(x_1, \ldots, x_r)$ ein Orthonormalsystem in V, so gilt für $x \in V$ stets

$$||x||^2 \geq \sum_{i=1}^{r} |\langle x_i, x \rangle|^2.$$

c) Sei $f \in \mathrm{End}_K(V)$ mit $||f(x)|| = ||x||$ für alle $x \in V$. Zeige, es gilt:

   i) $\langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle$ für alle $x, y \in V$.

   ii) f ist injektiv.

Aufgabe 55: Sei V ein endlich-dimensionaler euklidischer oder unitärer Vektorraum. Zeige, ist $f \in \mathrm{End}_K(V)$ normal, so gelten

$$\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^*)$$

und

$$V = \mathrm{Ker}(f) \perp \mathrm{Im}(f).$$

Aufgabe 56: (Präsenzaufgabe)
Überprüfe, ob die folgende symmetrische Matrix $A \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{R})$ positiv definit ist

$$A := \begin{pmatrix} 9 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Welche Verfahren sind dir hierfür bekannt? Diese Aufgabe ist nicht Teil der schriftlichen Abgabe. Sie soll in den Übungsgruppen gemeinsam besprochen werden.