Fachbereich Mathematik | Wintersemester 2016, Blatt 1
Thomas Markwig

Mathematik für Physiker 3

Abgabetermin: Montag, 24.10.2016, 08:00

Aufgabe 1:

a. Identifizieren wir den $\mathbb{R}$-Vektorraum $\operatorname{Mat}(m \times n, \mathbb{R})$ der $m \times n$-Matrizen mit $\mathbb{R}^{m\times n}$, so wird die euklidische Norm definiert durch

$$\|(a_{ij})\|_2 := \sqrt{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2}.$$

Zeige, für eine Matrix $A \in \operatorname{Mat}(m \times n, \mathbb{R})$ und einen Vektor $x \in \mathbb{R}^n$ gilt stets

$$\|Ax\|_2 \leq \|A\|_2 \cdot \|x\|_2.$$

b. Überprüfe, welche der folgenden Mengen A offen, abgeschlossen und / oder kompakt in M bezüglich der euklidischen Norm ist? Was ist der Rand von A?

$$\text{(1) } A = \{(x, y)^t \mid x^2 < y\}, M = \mathbb{R}^2 \quad \text{(2) } A = \left\{ \frac{(-1)^n}{2^n} \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \right\} \cup \{0\}, M = \mathbb{R}.$$

Wir betrachten hier M jeweils mit der euklidischen Norm als normierten Raum.

Aufgabe 2: Es sei $M = \mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid a_n \in \mathbb{R}\}$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum der reellen Zahlenfolgen und für $A = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}, B = (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in M$ sei

$$d(A, B) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} \cdot \frac{|a_k - b_k|}{1 + |a_k - b_k|}.$$

Zeige, d ist eine Metrik auf M.

Aufgabe 3: Sei M ein metrischer Raum, $A \subseteq U \subseteq M$. Zeige folgende Aussagen:

a. $\overline{U} = \mathring{U} \,\dot{\cup}\, \partial U$.

b. ∂U ist abgeschlossen in M.

c. Ist A abgeschlossen und U offen, so ist $U \setminus A$ offen.

Aufgabe 4: Betrachte $U \subseteq M$ als metrischen Raum mit der Einschränkung der Metrik von M.

a. $X \subseteq U$ ist offen in $U \iff \exists\, O$ offen in M mit $X = U \cap O$.

b. $X \subseteq U$ ist abgeschlossen in $U \iff \exists\, A$ abgeschlossen in M mit $X = U \cap A$.

Man nennt die Menge X dann auch *relativ* offen oder abgeschlossen in M.