Fachbereich Mathematik
Thomas Markwig

Wintersemester 2016, Blatt 2

Mathematik für Physiker 3

Abgabetermin: Montag, 31.10.2016, 08:00

Aufgabe 5: Zeige, in einem metrischen Raum ist der Durchschnitt beliebig vieler kompakter Mengen kompakt.

Aufgabe 6: Zeige, ist M ein kompakter metrischer Raum, so ist M vollständig.

Aufgabe 7: Sei $V = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ der Vektorraum der auf dem Intervall $[0,1]$ stetigen Funktionen und es sei

$$||f||_{L_2} = \sqrt{\int_0^1 f^2(x)\ dx}$$

die euklidische L_2-Norm auf V aus Beispiel 1.5.
Zeige, V ist nicht vollständig bezüglich der euklidischen L_2-Norm.

Hinweis, man betrachte die Funktionenfolge $(f_n)_{n\geq 1}$ mit

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \in [0, \frac{1}{2} - \frac{1}{n}] \\ \frac{1}{2}n\left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} & \text{für } x \in (\frac{1}{2} - \frac{1}{n}, \frac{1}{2} + \frac{1}{n}) \\ 1 & \text{für } x \in [\frac{1}{2} + \frac{1}{n}, 1] \end{cases}.$$

Aufgabe 8: Sei

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x,y)^t \longmapsto \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4} & \text{falls } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{falls } (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Zeige, dass f im Nullpunkt das Folgenkriterium für Stetigkeit für jede Folge erfüllt, die sich auf einer Geraden dem Nullpunkt nähert. Ist f in $(0,0)$ stetig?