Fachbereich Mathematik Wintersemester 2016, Blatt 4

Thomas Markwig

Mathematik für Physiker 3

Abgabetermin: Montag, 14.11.2016, 08:00

Aufgabe 13: Zeige, ist $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ symmetrisch, so ist

$$||f_A|| = \max\left\{|\lambda| \;\middle|\; \lambda \text{ ist Eigenwert von } A\right\}$$

die Operatornorm von $f_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ bezüglich der euklidischen Norm auf $\mathbb{R}^n$.

Aufgabe 14:

(a) Begründe, weshalb $f : \mathbb{R}^3_{>0} \longrightarrow \mathbb{R}^2 : (x, y, z)^t \mapsto (z\sqrt{y} + \sqrt{z}, xyz + \ln(x + y))^t$ total differenzierbar ist, und berechne die Ableitung von f.

(b) Zeige, für $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ ist $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^t \circ A \circ x$ total differenzierbar auf $\mathbb{R}^n$ und berechne die Ableitung.

Aufgabe 15: Zeige, die folgende Funktion ist total, aber nicht stetig differenzierbar auf $\mathbb{R}^2$:

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \begin{cases} ||x||_2^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{||x||_2}\right), & \text{falls } x \neq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Aufgabe 16: Zeige, ist $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ eine in $(0, \ldots, 0)^t \in \mathbb{R}^n$ total differenzierbare Abbildung mit der Eigenschaft $f(\lambda x) = \lambda f(x)$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n$, so ist f $\mathbb{R}$-linear.