Mathematik für Physiker 3

Abgabetermin: Montag, 21.11.2016, 08:00

Aufgabe 17: Betrachte die Funktion

$$f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}:(x,y)^t\mapsto\begin{cases}\left(1-\cos\left(\frac{x^2}{y}\right)\right)\cdot\sqrt{x^2+y^2}, & \text{falls } y\neq 0\\ 0, & \text{sonst}\end{cases}.$$

a. Ist f stetig im Ursprung?

b. Welche Richtungsableitungen von f im Ursprung existieren?

c. Ist f total differenzierbar im Ursprung?

d. Ist f stetig differenzierbar auf $\mathbb{R}^2$?

Aufgabe 18: Zeige, dass für die Funktion

$$f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R},\ x\longmapsto\begin{cases}\frac{x_1^3x_2-x_1x_2^3}{x_1^2+x_2^2}, & \text{falls } (x_1,x_2)^t\neq(0,0)^t\\ 0 & \text{sonst}\end{cases}$$

die beiden partiellen Ableitungen $D_1D_2f(0,0)$ und $D_2D_1f(0,0)$ existieren, aber nicht übereinstimmen.

Aufgabe 19: Sei $\Delta=D_1^2+\ldots+D_n^2$ der *Laplace-Operator* und $f\in\mathcal{C}^2((0,1),\mathbb{R})$. Zeige, dass für die Funktion $\varphi:\mathbb{R}^n\setminus\{(0,\ldots,0)^t\}\longrightarrow\mathbb{R},\ x\longmapsto f(||x||_2)$ die Gleichung

$$\Delta\varphi(x)=f''(||x||_2)+\frac{n-1}{||x||_2}\cdot f'(||x||_2)\quad\text{für alle } x\in\mathbb{R}^n\setminus\{(0,\ldots,0)^t\}$$

gilt und berechne $\Delta\varphi$ für den Fall $f(t)=\frac{1}{t^{n-2}}$ mit $n>2$.

Aufgabe 20:

(a) Bestimme die Taylorreihe $T_{f,a}$ für $a=(1,-1)^t$ und

$$f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R},\ (x,y)^t\longmapsto x^3-xy^2+y^3-2x+y+3.$$

(b) Bestimme das sechste Taylorpolynom $T_{f,a}^6$ für $a=(0,0,0)^t$ und

$$f:\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R},\ (x,y,z)^t\longmapsto(x+y^3)\cdot\cos\left(\frac{z}{1+y^2}\right).$$